Devoir Survéille N°2

Ensembles-Application-Nombres Complexes

Jeudi 01 Novembre 2016

Durée : 4 heures

Documents et Calculatrices interdites

Questions de Cours

1. Remplir les vides : $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \dots, \operatorname{Re}(z_1.z_2) = \dots$;
2. Remplir les vides : $|z_1 + z_2| \dots, |z_1.z_2| \dots$;
3. Remplir les vides : $\overline{z_1 + z_2} = \dots, \overline{z_1.z_2} \dots$;
4. Remplir les vides : $e^{ia} + e^{ib} = \dots, e^{ia} - e^{ib} = \dots$;
5. Remplir les vides : $1 + e^{i\theta} = \dots, 1 - e^{i\theta} = \dots$;
6. Rappeler les définitions de : $x \in A \cap B$ et $x \in A \cup B$;
7. Rappeler les définitions de : $A\Delta B$ et $nA \setminus B$;
8. Rappeler les définitions de : f injective et celle de f surjective ;
9. Remplir les vides : Si f et g sont bijectives, alors $f \circ g$ est ... avec, $(f \circ g)^{-1} = \dots$;
10. Remplir les vides : $x \in f(A) \Leftrightarrow \dots, x \in f^{-1}(A) \Leftrightarrow \dots$.

Exercice Application de Cours : Nombres Complexes

Question 1 : Trouver les modules et arguments de

$$z_1 = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i} \qquad z_2 = 1 + i\tan\theta \quad \text{où } \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}\right[$$

$$z_3 = (1+i)^n \qquad z_4 = \frac{1+\cos\theta + i\sin\theta}{1-\cos\theta - i\sin\theta} \quad \text{où } \theta \in]0, 2\pi[$$

Question 2 :

1- Rappeler la construction du triangle de Pascal de n=1 jusqu'à n=5

2- En déduire les expressions de (a+b)^n de n=2 jusqu'à n=5

Question 3 : Linéariser $\cos^2(x)$, $\sin^4(x)$ et $\cos^2(x)\sin^3(x)$.

Question 4 :

1. Exprimer $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$ – on écrira le résultat sous la forme $\sin(5\theta) = P(\sin(\theta))$, où P est un polynôme de degré 5.
2. Déterminer les racines de P.
3. Montrer que $\sin(\frac{\pi}{5})$ est une racine de P, et en déduire sa valeur.

Exercice Application de Cours : Nombres Complexes

Question 5 :

1. Déterminer les racines carrées de $1+6i$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $\dfrac{z+i}{z-i}=i$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(2+i)z^2+(5-i)z+2-2i=0$
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n=e^{in\theta}$
5. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^6-2z^3\cos\theta+1=0$

Exercice Approfondissement de Connaissances : Nombres Complexes

Question 1 :

Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}$, $|z|\leqslant|z^2|+|z-1|$.

Question 2 :

Soit $z=\exp\left(\dfrac{2i\pi}{7}\right)$, $u=z+z^2+z^4$ et $v=z^3+z^5+z^6$.

1. Calculer $u+v$.
2. Exprimer u^2 en fonction de v.
3. En déduire $\sin\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\dfrac{4\pi}{7}\right)+\sin\left(\dfrac{8\pi}{7}\right)$.

Question 3 :

On pose $z_1=1+i\sqrt{3}$, $z_2=1-i$ et $z_3=\dfrac{z_1}{z_2}$.

1. Déterminer les formes trigonométriques et algébriques de z_3.
2. En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice Facultatif : Nombres Complexes

Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}$ avec $|z|\neq 1$, et tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right|\leqslant\frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}.$$

Exercices Application de Cours : Ensembles-Applications

Question 1 :

Soit A, B, C trois parties d'un ensemble E.

1. Montrer que $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A$ et $A \subset C$
2. En déduire que si $A \cup B = A \cap C$, $B \cup C = B \cap A$ et $C \cup A = C \cap B$ alors $A = B = C$.

Question 2 :

Montrer que les applications suivantes sont bijectives et déterminer leur application réciproque :

$$f_1 : [0, +\infty[\to]\tfrac{1}{2}, 1] \qquad x \mapsto \frac{1+x}{1+2x}$$

Exercices Approfondissement de Connaissances : Ensembles-Applications

Question 1 :

On considère deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Montrer que

1. ** Si $g \circ f$ est injective et f surjective alors g est injective.
2. ** Si $g \circ f$ est surjective et g injective alors f est surjective.

Question 2 :

Montrer que les applications suivantes sont bijectives et déterminer leur application réciproque :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x+y, x-y) \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y, x+3y) \end{array}$$

Question 3 :

On note $E = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0\}$ et $F = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

1. Représenter E et F dans le plan complexe.
2. Montrer que $\forall z \in E,\ \frac{z-i}{z+i} \in F$.
3. On définit alors l'application $f : E \to F$ par : $\forall z \in E,\ f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$.
   Montrer que f réalise une bijection de E dans F et déterminer l'application réciproque f^{-1}.

FIN