Simulation Concours Blanc

Suites Numériques

Jeudi 29 Novembre 2018

Durée 1 heure

On désigne par E l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la donnée de trois réels u_0, u_1 et u_2, et par la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0. \tag{R}$$

1. Dans cette question, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que $u_0 = 4$, $u_1 = -5$ et $u_2 = 13$. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $v_n = u_{n+1} + 2u_n$.
   (a) Calculer v_0 et v_1.
   (b) Exprimer v_{n+2} en fonction de v_{n+1} et v_n.
   (c) Montrer par récurrence que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -2u_n + 3$.
   (d) Exprimer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   (e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^{n} u_k$.
2. Dans cette question, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que $u_0 = 2$, $u_1 = -2$ et $u_2 = 3$. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $w_n = u_n - (-2)^n$.
   (a) Vérifier que $w_2 - 2w_1 + w_0 = 0$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n = 0$.
   (c) Exprimer w_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   (d) En déduire l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   (e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Fin

On désigne par E l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la donnée de trois réels u_0, u_1 et u_2, et par la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0. \tag{R}$$

1. *Dans cette question, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que $u_0 = 4$, $u_1 = -5$ et $u_2 = 13$. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $v_n = u_{n+1} + 2u_n$.*

   (a) *Calculer v_0 et v_1.*

   ▶ On a $v_0 = u_1 + 2u_0 = -5 + 2 \times 4 = \boxed{3}$ et $v_1 = u_2 + 2u_1 = 13 + 2 \times (-5) = \boxed{3}$.

   (b) *Exprimer v_{n+2} en fonction de v_{n+1} et v_n.*

   ▶ Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la définition de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la relation (R), on obtient :

$$\begin{aligned} v_{n+2} &= u_{n+3} + 2u_{n+2} \\ &= (u_{n+3} - 3u_{n+1} + 2u_n) + 3u_{n+1} - 2u_n + 2u_{n+2} \\ &= 0 + 2(u_{n+2} + 2u_{n+1}) - (u_{n+1} + 2u_n) \\ &= \boxed{2v_{n+1} - v_n}. \end{aligned}$$

   (c) *Montrer par récurrence que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -2u_n + 3$.*

   ▶ On démontre le résultat par récurrence double. Plus précisément, on considère pour tout $n \in \mathbb{N}$ la proposition $\mathcal{P}(n)$: «$v_n = 3$ et $v_{n+1} = 3$». $\mathcal{P}(0)$ est vraie d'après le résultat de la question 1.(a). On suppose maintenant que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$ fixé. Alors $v_n = 3$ et $v_{n+1} = 3$ par hypothèse de récurrence. D'après le résultat de la question précédente, on obtient :

$$v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n = 2 \times 3 - 3 = 3.$$

   Ainsi $v_{n+1} = 3$ et $v_{n+2} = 3$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et cette implication est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On conclut d'après le principe de récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent $\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est la suite constante égale à } 3}$.

   Rédigez précisément et soigneusement vos raisonnements par récurrence, a fortiori les récurrences doubles.

   On en déduit pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $u_{n+1} + 2u_n = v_n = 3$ et donc $\boxed{u_{n+1} = -2u_n + 3}$.

   (d) *Exprimer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.*

   ▶ D'après le résultat précédent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. On cherche donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(u_n - \alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite géométrique. Or on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - \alpha = -2u_n + 3 - \alpha = -2(u_n - \alpha) - 2\alpha + 3 - \alpha = -2(u_n - \alpha) - 3\alpha + 3.$$

   En posant $\alpha = 1$, on a $-3\alpha + 3 = 0$ et donc $(u_n - 1)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison -2. On en déduit pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $u_n - 1 = (u_0 - 1)(-2)^n = (4-1)(-2)^n = 3(-2)^n$. Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \boxed{u_n = 1 + 3(-2)^n}.$$

(e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

▶ D'après le résultat précédent, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n}\left(1+3(-2)^k\right) = \sum_{k=0}^{n} 1 + 3\sum_{k=0}^{n}(-2)^k = n+1+3\frac{(-2)^{n+1}-1}{-2-1} \\ &= n+1-\left((-2)^{n+1}-1\right) = \boxed{n+2-(-2)^{n+1}}.\end{aligned}$$

2. *Dans cette question, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que $u_0 = 2$, $u_1 = -2$ et $u_2 = 3$. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $w_n = u_n - (-2)^n$.*

(a) Vérifier que $w_2 - 2w_1 + w_0 = 0$.

▶ On a $w_0 = u_0 - (-2)^0 = 2 - 1 = 1$, $w_1 = u_1 - (-2)^1 = -2 + 2 = 0$ et $w_2 = u_2 - (-2)^2 = 3 - 4 = -1$. Donc $w_2 - 2w_1 + w_0 = -1 - 2\times 0 + 1 = \boxed{0}$.

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n = 0$.

▶ On démontre le résultat par récurrence. Le résultat de la question précédente justifie que la proposition est vraie pour $n = 0$. On suppose que $w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n = 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ fixé. En utilisant l'hypothèse de récurrence puis la définition de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la relation (R), on obtient :

$$\begin{aligned}w_{n+3} - 2w_{n+2} + w_{n+1} &= w_{n+3} - 2(w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n) - 4w_{n+1} + 2w_n + w_{n+1} \\ &= w_{n+3} + 0 - 3w_{n+1} + 2w_n \\ &= (u_{n+3} - (-2)^{n+3}) - 3(u_{n+1} - (-2)^{n+1}) + 2(u_n - (-2)^n) \\ &= (u_{n+3} - 3u_{n+1} + 2u_n) - ((-2)^3 - 3(-2)^1 + 2(-2)^0)(-2)^n \\ &= 0 - (-8+6+2)(-2)^n = 0.\end{aligned}$$

On conclut d'après le principe de récurrence que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n = 0}$.

(c) Exprimer w_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

▶ D'après le résultat précédent, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est l'équation $r^2 - 2r + r = (r-1)^2 = 0$ d'inconnue $r \in \mathbb{C}$. Cette équation a pour unique solution $r_0 = 1$. Le terme général de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = (\lambda + \mu n)(r_0)^n = \lambda + \mu n$$

où λ et μ sont deux nombres réels. On obtient pour $n = 0$: $\lambda = \lambda + \mu \times 0 = w_0 = 1$, et pour $n = 1$: $\lambda + \mu = \lambda + \mu \times 1 = w_1 = 0$ donc $\mu = -\lambda = -1$. Finalement, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = 1 - n}$.

(d) En déduire l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

▶ Puisque $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour terme général $w_n = u_n - (-2)^n$, on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \boxed{u_n = 1 - n + (-2)^n}.$$

(e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

▶ D'après le résultat précédent, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n}(1 - k + (-2)^k) = \sum_{k=0}^{n} 1 - \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n}(-2)^k \\ &= n + 1 - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(-2)^{n+1} - 1}{-2-1} = \boxed{\frac{(2-n)(n+1)}{2} + \frac{1-(-2)^{n+1}}{3}}.\end{aligned}$$