Concours Blanc N°1

Suites Numériques Fonctions Réelles

Durée 4 heures

3 Décembre 2018

Calculatrices et Documents Interdits

Question de Cours

1. Rappeler la définition de $\mathrm{E}(x)$, puis donner un aperçu de sa courbe ;
2. Rappeler la définition de majorant, minorant ;
3. Rappeler la définition de borne supérieure, borne inférieure ;
4. Rappeler l'énoncé de la propriété caractéristique de la borne supérieure ;
5. Rappeler l'énoncé des croissances comparés pour les suites numériques ;
6. Rappeler la définition de suite adjacentes ;
7. Rappeler l'énoncé des croissances comparés pour les fonctions réelles au voisinage de 0 ;
8. Rappeler l'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires ;
9. Rappeler l'énoncé du théorème de Rolle ;
10. Rappeler l'énoncé du théorème des accroissements finis ;

Exercices Application de Cours

Exercice 1. Calculer la dérivée des fonctions définies par les formules suivantes :

(a) $f(x) = \ln(\ln(x - \ln x))$ pour tout $x > 1$

(b) $f(x) = x\sin(\ln x)$ pour tout $x > 0$

(c) $f(x) = \sqrt{1 - 2\sin^2 x}$ pour tout $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$

(d) $f(x) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{1 + \mathrm{e}^{\sqrt{x}}}$ pour tout $x \geq 0$.

Exercice 2. Soit α un réel strictement supérieur à 1. On dfinit une suite en posant $x_0 = \alpha$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{\alpha}{x_n}\right)$.

(1) Montrer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité $x_n > 0$.

(2) Montrer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité $x_n^2 \geq \alpha$.

(3) Montrer que la suite (x_n) est décroissante, puis qu'elle est convergente vers une limite ℓ à préciser.

(4) On pose, pour tout entier $n, \mathrm{e}_n = x_n - \ell$. Montrer, pour tout entier n, l'égalité

$\mathrm{e}_{n+1} = \dfrac{\mathrm{e}_n^2}{2x_n}$ et en déduire l'encadrement $0 < x_n - \ell < \dfrac{1}{2^n}\mathrm{e}_0$;

Exercice Facultatif :

Exercice 3. On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{1 + \ln x}{x}$ et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) Etudier les variations de f.

(2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- **(a)** Déterminer x_1 abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe $(O, \vec{i})$.
- **(b)** Déterminer x_2 abscisse du point en lequel la tangente à $\mathcal{C}$ passe par l'origine.
- **(c)** Déterminer x_3 abscisse du point en lequel la tangente à $\mathcal{C}$ est parallèle à l'axe $(O, \vec{i})$.
- **(d)** Déterminer x_4 tel que $h''(x_4) = 0$.

(3) Vérifier que x_1, x_2, x_3, x_4 sont quatre termes consécutifs d'une suite géométrique.

Problème 1 : Suites Numériques

Partie I :

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n + e^{-a_n}$.

On introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x + e^{-x}$.

(1) Nature de la suite (a_n).

(a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

(b) Etudier les variations de la fonctions f.

(c) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité $a_n \geq \ln(n+1)$ et en déduire la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers l'infini.

(2) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = a_n - \ln(n)$.

(a) Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité $b_n > 0$.

(b) Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement $\dfrac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \dfrac{1}{n}$.

(c) Montrer que la suite (b_n) est décroissante, puis qu'elle est convergente.

Partie II : Indépendante de la partie I

On note E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = (4n+2)u_n + u_{n-1}$$

(1) On considère les deux suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à E et définies par $\alpha_0 = \beta_1 = 1$ et $\alpha_1 = \beta_0 = 0$.

(a) Étudier la monotonie des suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Montrer que les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers l'infini.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\alpha_{n+1}\beta_n - \alpha_n\beta_{n+1} = (-1)^{n+1}$.

(d) Montrer que les deux suites $\left(\dfrac{\alpha_{2n}}{\beta_{2n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\dfrac{\alpha_{2n+1}}{\beta_{2n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. On notera ℓ leur limite commune.

(e) Que peut-on dire de la suite $\left(\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

(2) Comparaison asymptotique des suites.

(a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $\left|\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}-\ell\right| \leq \dfrac{1}{\beta_n\beta_{n+1}}$.

(b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n-\ell\beta_n)$.

(c) Soit $\mu\in\mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n-\mu\beta_n)$ en fonction de la position de μ par rapport à ℓ.

(3) Dans cette question, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de E.

(a) Montrer qu'il existe deux réels λ et λ' tels que :

$$u_0=\lambda\alpha_0-\lambda'\beta_0 \text{ et } u_1=\lambda\alpha_1-\lambda'\beta_1.$$

(b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\lambda\alpha_n-\lambda'\beta_n$.

(c) Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$, alors $\lambda'=\lambda\ell$.

Problème 2 : Fonctions Réelles

On appelle f et g les deux fonctions définies sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x)=\ln(1+x)-x \quad \text{et} \quad g(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}.$$

(1) Etudier les variations de f et de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.

(2) En déduire que pour tout $x\geq 0$, $x-\frac{x^2}{2}\leq \ln(1+x)\leq x$.

On se propose d'étudier la suite (u_n) de nombres réels définie par :

$$u_1=\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1}=u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

(3) Montrer par récurrence que $u_n>0$ pour tout entier naturel $n\geq 1$.

(4) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n\geq 1$:

$$\ln u_n=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right).$$

(5) On pose $S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ et $T_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{4^n}$.
à l'aide de la première partie, montrer que :

$$S_n-\frac{1}{2}T_n\leq \ln u_n\leq S_n.$$

(6) Calculer S_n et T_n en fonction de n. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

(7) Etude de la convergence de la suite (u_n).

- **(a)** Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.
- **(b)** En déduire que (u_n) est convergente. Soit ℓ sa limite.
- **(c)** On admet le résultat suivant : si deux suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et telles que $v_n\leq w_n$ pour tout n entier naturel, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n\leq \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

  Montrer alors que $\frac{5}{6}\leq \ln\ell\leq 1$ et en déduire, un encadrement de ℓ.

Fin