Simulation DS N°4

Fonctions Réelles-Intégration

22 Janvier 2019

Durée : 1 heure

Calculatrices Interdites

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A - Étude d'une fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ et Γ est sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) Étudier la parité de f.

(2) Montrer que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $-1 < f(x) < 1$.

(3) Quelles sont les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$?

(4) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis établir que $f'(x) = 1 - f(x)^2$. Établir les variations de f et dresser son tableau de variations ; en déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

(5) Le réel α étant un nombre appartenant à $]-1\,;\,1[$, montrer que l'équation $f(x) = \alpha$ admet une solution unique x_0. Exprimer alors x_0 en fonction de α.

Partie B - Tangentes à la courbe

(1) Déterminer une équation de la tangente Δ_2 à Γ au point A d'ordonnée $\dfrac{1}{2}$.

(2) Montrer que le point B de la courbe Γ, d'ordonnée positive, où le coefficient directeur de la tangente est égal à $\dfrac{1}{2}$ a pour coordonnées :

$$\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\ ;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Partie C - Calcul d'intégrales

(1) Calculer $\displaystyle\int_0^1 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

(2) Montrer que $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; en déduire une primitive de f.

(3) **(a)** Montrer que sur $[0, +\infty[$ la courbe Γ est située sous la droite d'équation $y = x$.

(b) Calculer l'aire (en unité d'aire) de la surface comprise entre, la droite d'équation $y = x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

(3) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 x\left(1 - [f(x)]^2\right)\,\mathrm{d}x = \frac{e^2-1}{e^2+1} - \ln\left(\frac{e^2+1}{2e}\right).$$

En déduire $\displaystyle\int_0^1 x[f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

Fin

Corrigé

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A - Étude d'une fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ et Γ est sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) Étudier la parité de f.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = \frac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1} = \frac{(e^{-2x}-1)e^{2x}}{(e^{-2x}+1)e^{2x}} = \frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}} = -f(x)$$

donc f est impaire.

(2) Montrer que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $-1 < f(x) < 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

D'une part,

$$f(x) = \frac{e^{2x}+1-2}{e^{2x}+1} = 1 - \frac{2}{e^{2x}+1}$$

donc $f(x) < 1$ (puisque $\dfrac{2}{e^{2x}+1} > 0$), et d'autre part,

$$f(x) = \frac{-1-e^{2x}+2e^{2x}}{e^{2x}+1} = -1 + \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}$$

donc $f(x) > -1$ (puisque $\dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}+1} > 0$).

(3) Quelles sont les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$?

$$\left\{\begin{array}{rcl} \displaystyle\lim_{y\to+\infty} \frac{y-1}{y+1} & = & 1 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{2x} & = & +\infty \end{array}\right\} \text{ donc par composition de limites : } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

Par imparité, on a alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$.

(4) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis établir que $f'(x) = 1 - f(x)^2$. Établir les variations de f et dresser son tableau de variations ; en déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient défini de fonctions dérivables.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(e^{2x}+1) - 2e^{2x}(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}.$$

Or $4e^{2x} = (e^{2x}+1)^2 - (e^{2x}-1)^2$ donc

$$f'(x) = \frac{(e^{2x}+1)^2 - (e^{2x}-1)^2}{(e^{2x}+1)^2} = 1 - f(x)^2$$

Puisque f reste strictement comprise entre -1 et 1, on a $f'(x) = 1 - f(x)^2 > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Puisque $f(0) = 0$, la fonction f est donc négative sur $]-\infty, 0]$ et positive sur $[0, +\infty[$.

(5) Le réel α étant un nombre appartenant à $]-1\ ;\ 1[$, montrer que l'équation $f(x)=\alpha$ admet une solution unique x_0. Exprimer alors x_0 en fonction de α.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in]-1\ ;\ 1[$.

$$\begin{aligned} f(x)=\alpha &\iff \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}=\alpha \\ &\iff \mathrm{e}^{2x}-1=\alpha(\mathrm{e}^{2x}+1) \\ &\iff (1-\alpha)\mathrm{e}^{2x}=1+\alpha \\ &\iff \mathrm{e}^{2x}=\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \\ &\iff x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) \end{aligned}$$

L'équation $f(x)=\alpha$ admet donc une solution unique $x_0=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)$.

Partie B - Tangentes à la courbe

(1) Déterminer une équation de la tangente Δ_2 à Γ au point A d'ordonnée $\dfrac{1}{2}$.

Soit a l'abscisse du point A. On a donc $f(a)=\dfrac{1}{2}$ et par conséquent, $f'(a)=1-f(a)^2=\dfrac{3}{4}$. De plus, la partie précédente permet d'écrire $a=\dfrac{1}{2}\ln(3)$ donc une équation de la tangente Δ_2 est :

$$y=\frac{3}{4}\left(x-\frac{1}{2}\ln(3)\right)+\frac{1}{2}.$$

(2) Montrer que le point B de la courbe Γ, d'ordonnée positive, où le coefficient directeur de la tangente est égal à $\dfrac{1}{2}$ a pour coordonnées :

$$\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\ ;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Soit b l'abscisse de B. L'ordonnée de B est donc $f(b)$ et puisque le coefficient directeur de la tangente en B est égal à $\dfrac{1}{2}$, on a

$$f'(b)=1-f(b)^2=\frac{1}{2},$$

donc $f(b)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ puisque l'ordonnée de B est positive. D'après la partie précédente, on a donc

$$b=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right)$$

et comme $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1$, on a

$$b=\frac{1}{2}\ln\left((1+\sqrt{2})^2\right)=\ln(1+\sqrt{2})$$

Partie C - Calcul d'intégrales

(1) Calculer $\int_0^1 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$. On a $\int_0^1 (1-[f(x)]^2)\mathrm{d}x = \int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x = f(1)-f(0)$

donc $$\int_0^1 [f(x)]^2\mathrm{d}x = 1-f(1) = 1-\frac{\mathrm{e}^2-1}{\mathrm{e}^2+1} = \frac{2}{\mathrm{e}^2+1}.$$

(2) Montrer que $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$; en déduire une primitive de f.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1} = \frac{(\mathrm{e}^{2x}-1)\mathrm{e}^{-x}}{(\mathrm{e}^{2x}+1)\mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}.$$

On reconnait en $f(x)$ la forme dérivée $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$: une primitive de f est donc la fonction $x\mapsto \ln(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$.

(3) **(a)** Montrer que sur $[0,+\infty[$ la courbe Γ est située sous la droite d'équation $y=x$.

Puisque $f'(t) = 1-f(t)^2$, on a $1-f'(t)\geq 0$ donc $f'(t)\leq 1$, cela pour tout réel t. La propriété de positivité de l'intégrale donne alors, pour $x\geq 0$:

$$\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t \leq \int_0^x 1\mathrm{d}t,\ \text{donc } f(x)\leq x.$$

Sur $[0,+\infty[$, la courbe Γ est donc sous la droite d'équation $y=x$.

(b) Calculer l'aire (en unité d'aire) de la surface comprise entre la courbe Γ, la droite d'équation $y=x$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

Cette aire est donnée par l'intégrale $\int_0^1 (x-f(x))\mathrm{d}x$ qui se calcule aisément grâce à une primitive de f : $\int_0^1 (x-f(x))\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \ln(\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}) + \ln(2)$

(3) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 x\left(1-[f(x)]^2\right)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2-1}{\mathrm{e}^2+1} - \ln\left(\frac{\mathrm{e}^2+1}{2\mathrm{e}}\right).$$

En déduire $\int_0^1 x[f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

L'intégrale de gauche est : $\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x$.

Les fonctions f et $g : x\mapsto x$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{array}{rclcrcl} g(x) &=& x; & & g'(x) &=& 1\\ f'(x) &=& f'(x); & & f(x) &=& f(x)\end{array}$$

donc par intégration par parties,

$$\int_0^1 x\left(1-[f(x)]^2\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x = f(1) - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

Or $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \ln(\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}) - \ln(2)$ donc

$$\int_0^1 x\left(1-[f(x)]^2\right)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2-1}{\mathrm{e}^2+1} - \ln(\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}) - \ln(2) = \frac{\mathrm{e}^2-1}{\mathrm{e}^2+1} - \ln\left(\frac{\mathrm{e}^2+1}{2\mathrm{e}}\right)$$