My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Préparation DS N°4

Fonctions Réelles-Intégration

23 Janvier 2019

Durée : 1 heure

Calculatrices Interdites

Exercice 1 — On considère un entier n strictement positif et on définit la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = nx - e^{-x}.$$

1. a) Etudier l'existence et la valeur de la limite de $f_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Déterminer la limite de $f_n(x) - nx$ lorsque x tend vers $+\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.

2. a) Etudier l'existence et la valeur de la limite de $f_n(x)$lorsque x tend vers $-\infty$.

b) Prouver que f_n admet une branche parabolique en $-\infty$, de direction l'axe des ordonnées.

3. a) Etudier les variations de f_n sur $\mathbb{R}$.

b) Donner une allure de la courbe représentative de f_2 dans un repère orthonormé.

4. Montrer que l'équation $nx - e^{-x}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$. On note u_n cette solution.

5. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer u_n en fonction de $\exp(-u_n)$.

b) Etudier le signe de u_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

d) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ et déterminer sa limite.

e) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 1$

Exercice 2 : Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

(1) Calculer I_0 puis établir une relation de récurrence entre I_{k+1} et I_k.

(2) Déterminer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

(3) En déduire la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Fin

Corrigé

Exercice 1 —

1. a) On sait que $\lim_{x\to+\infty} nx = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$. Par somme des limites, $f_n(x)$ admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

b) On a $f_n(x) - nx = -e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Graphiquement, la courbe représentative de f_n admet donc une asymptote oblique d'équation $y = nx$ au voisinage de $+\infty$.

2. a) On sait que $\lim_{x\to-\infty} nx = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$. Par différence (forme « $-\infty-\infty$ »), $f_n(x)$ admet donc $-\infty$ pour limite lorsque $x \to -\infty$.

b) On étudie la limite de $\frac{f_n(x)}{x}$ lorsque $x \to -\infty$. On a $\frac{f_n(x)}{x} = n + \frac{e^{-x}}{-x}$.
Or par croissance comparées, $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{-x} = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty$ donc $\frac{f_n(x)}{x}$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \to -\infty$: la courbe représentative de f_n admet une branche parabolique en $-\infty$, de direction l'axe des ordonnées.

3. a) f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = n + e^{-x} > 0$. Le tableau de variation de f_n est donc le suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_n'(x)$	+	
$f_n(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

b)

4. Il s'agit de prouver que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution dans $\mathbb{R}$. Pour cela, on prouve que f_n est bijective sur $\mathbb{R}$ et que $0 \in f_n(\mathbb{R})$. On vérifie les hypothèses du théorème de la bijection :

- f_n est continue sur $\mathbb{R}$.
- f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Aux bornes de l'intervalle on a $\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

Ainsi f_n réalise une bijection $\mathbb{R}$ dans $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ donc il existe bien un unique $u_n \in \mathbb{R}$ tel que $f_n(u_n) = 0$.

5. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n(u_n) = nu_n - \exp(-u_n) = 0$ donc $u_n = \frac{\exp(-u_n)}{n}$.

b) D'après l'égalité précédente, puisque exp est strictement positive, on a $u_n = \frac{\exp(-u_n)}{n} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comparons $f_n(u_n)$ et $f_{n+1}(u_{n+1})$:

- On sait que $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$.
- Cherchons le signe de $f_{n+1}(u_n)$. On a :
  $f_{n+1}(u_n) = (n+1)u_n - e^{-u_n} = (nu_n - e^{-u_n}) + u_n = f_n(u_n) + u_n = 0 + u_n = u_n > 0$.

Ainsi $f_{n+1}(u_{n+1}) < f_{n+1}(u_n)$ ce qui impose, puisque f_{n+1} est croissante, $u_{n+1} < u_n$. Donc la suite $(u_n)_{n\geq1}$ est décroissante.

d) La suite $(u_n)_{n\geq1}$ est décroissante et minorée par 0 donc converge vers une limite $l \geq 0$.
Montrons que $l = 0$. Par l'absurde, si $l > 0$ alors $nu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. De plus $\exp(-u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(-l)$. Par somme des limites on aurait donc $nu_n - \exp(-u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ce qui est impossible puisque l'on sait par ailleurs que $nu_n - \exp(-u_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $nu_n = \exp(-u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ (en utilisant la continuité de exp en 0 et le fait que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$).

Exercice 2 : Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

(1) Calculer I_0 puis établir une relation de récurrence entre I_{k+1} et I_k.

On a $I_0 = e - 1$.

Soit $k \in \mathbb{N}$.

Les fonctions $u : x \mapsto -\dfrac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!}$ et $v : x \mapsto e^x$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$:

$$\begin{aligned} u(x) &= -\frac{(1-x)^{k+1}}{(k+1)!} & \qquad v'(x) &= e^x \\ u'(x) &= \frac{(1-x)^k}{k!} & \qquad v(x) &= e^x \end{aligned}$$

donc par intégration par parties

$$I_k = u(1)v(1) - u(0)v(0) + I_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!} + I_{k+1}$$

(2) Déterminer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Pour tout $x \in [0,1]$,

$$1 \leq e^x \leq e \text{ et } 0 \leq (1-x)^n \leq 1$$

donc

$$0 \leq \frac{(1-x)^n}{n!} e^x \leq \frac{e}{n!}$$

et par positivité de l'intégrale

$$0 \leq I_n \leq \frac{e}{n!}.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n!} = 0$, le théorème de convergence par encadrement implique

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.$$

(3) En déduire la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$I_k - I_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!}$$

et par sommation

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n} (I_k - I_{k+1}) = I_0 - I_n$$

donc

$$S_n = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!} = 1 + I_0 - I_n = e - I_n$$

et puisque $\lim I_n = 0$, on a $\lim S_n = e$.

Fin