Préparation DS N°4

Polynômes

24 Janvier 2019

Durée : 1 heure

Calculatrices Interdites

Etude d'un ensemble de polynômes. — On note E l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant

$$P(X)P(X+2) = P(X^2).$$

On considère un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ et on suppose que P est un élément de E. On considère par ailleurs une racine complexe r de P.

1. Montrer que r^2 et r^4 sont aussi racines de P.

2. On suppose dans cette question que $r \neq 0$ et $|r| \neq 1$.

a) Montrer qu'alors P admet une infinité de racines.

b) Que peut-on en déduire ?

3. Dans cette question, on suppose que P n'est pas le polynôme nul.

a) Que peut-on dire de r ?

b) Montrer que $(r-2)^2$ est racine de P.

c) Montrer que r ne peut pas être nul.

d) Montrer que $|r| = \left|(r-2)^2\right| = 1$.

e) En déduire que la seule racine possible de P dans $\mathbb{C}$ est 1.

4. Montrer que si P n'est pas le polynôme nul, alors P est unitaire.

5. A l'aide des questions précédentes, décrire l'ensemble E.

Indication : On pourra utiliser le résultat suivant (conséquence admise du théorème de D'Alembert-Gauss) :

tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non-nul peut s'écrire sous la forme $P(X) = \lambda \prod_{i=1}^{k} (X-\alpha_i)^{r_i}$ où λ est le coefficient dominant de P, où les complexes $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sont les racines distinctes de P et $r_1, \ldots, r_k$ leurs ordres de multiplicités respectifs.

Fin

Corrigé

Etude d'un ensemble de polynômes. — On note E l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant

$$P(X)P(X+2) = P(X^2). \tag{$*$}$$

On considère un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ et on suppose que P est un élément de E. On considère par ailleurs une racine complexe r de P.

1. Par hypothèse $P(r) = 0$. Ainsi, puisque $P \in E$, on a en évaluant la relation $(*)$ en r :

$$P(r^2) = P(r) \times P(r+2) = 0 \times P(r+2) = 0.$$

Dès lors, vu que $P(r^2) = 0$ et que $r^4 = (r^2)^2$, on a de même $P(r^4) = P(r^2) \times P(r^2+2) = 0 \times P(r^2+2) = 0$.

2. On suppose dans cette question que $r \neq 0$ et $|r| \neq 1$.

a) En réitérant le raisonnement mené à la question 1, on constate que $0 = P(r^2) = P(r^4) = P(r^8) = P(r^{16}) = \ldots$. Plus précisément, , on montre aisément par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(r^{2^k}) = 0$.
Autrement dit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, r^{2^k} est racine de P. Aussi, puisque $r \neq 0$ et $|r| \neq 1$, les complexes r^{2^k} sont deux à deux distincts [1] de sorte que l'ensemble $\left\{r^{2^k}, k \in \mathbb{N}\right\}$ est infini : P a donc une infinité de racines.

b) Le polynôme P possédant une infinité de racines, on en déduit que ce dernier est le polynôme nul.

3. Dans cette question, on suppose que P n'est pas le polynôme nul.

a) Dans la question précédente, nous avons montré que si $r \neq 0$ et $|r| = 1$, alors le polynôme P est nul. Par contraposée, si P n'est pas le polynôme nul, on en déduit qu'alors $r = 0$ ou $|r| = 1$.

b) Puisque $P \in E$, on sait que $P\Big((r-2)^2\Big) = P(r-2) \times P\Big((r-2)+2\Big) = P(r-2) \times P(r) = P(r-2) \times 0 = 0$ (car r est racine de P)

c) Par l'absurde, supposons que $r = 0$. D'après la question précédent $-2 = r-2$ est aussi racine de P. Dans ce cas, puisque $P(-2) = 0$ et puisque -2 n'est ni nul, ni de module 1, le résultat de la question 2 implique que P est le polynôme nul. Ceci étant exclu dans cette question, on en déduit donc que $r \neq 0$.

d) D'après la question 3 a), on sait que $r = 0$ ou $|r| = 1$. Nous venons de prouver que r n'est pas nul. Par conséquent $|r| = 1$. De même, puisque le complexe $\rho = (r-2)^2$ est racine de P (d'après 3 b)), il s'ensuit que $\rho = 0$ ou $\left|\rho\right| = 1$ (procéder de même qu'en 3 a)). En reproduisant le raisonnement de la question précédente on prouve que $\rho \neq 0$ et donc que, nécessairement, $\left|\rho\right| = 1$.

e) Ecrivons r sous forme trigonométrique $r = e^{i\theta}$ (r est de module 1). Dès lors on a

$$|r-2|^2 = \left|e^{i\theta} - 2\right|^2 = (e^{i\theta} - 2)(e^{-i\theta} - 2) = 1 + 4 - 4\cos\theta = 5 - 4\cos\theta.$$

Sachant que $|r-2|^2 = 1$, on en déduit d'abord que $\cos\theta = 1$ puis que $\theta = 0[2\pi]$ et donc que $r = e^{i\theta} = 1$.
En résumé, les questions 3a)–e) ont permis de prouver que, si r est une racine de P *a priori* quelconque, alors r est nécessairement égale à 1. La seule racine possible de P est donc $r = 1$.

4. Supposons P non nul et notons λ le coefficient dominant de P.

- Le coefficient des polynôme $P(X^2)$ et $P(X+2)$ est aussi λ
- Le coefficient dominant du polynôme produit $P(X)P(X+2)$ est le produit des coefficients dominants des deux facteurs, à savoir $\lambda \times \lambda$.

D'après $(*)$, $P(X^2) = P(X)P(X+2)$ donc, en identifiant les coefficients dominants on a : $\lambda = \lambda^2$. Comme $\lambda \neq 0$ (puisque P n'est pas nul) on en déduit que $\lambda = 1$ c'est à dire que P est unitaire

5. Faisons le bilan de toutes les questions précédentes. On a prouvé que si P est un polynôme de l'ensemble E alors :

- soit P est le polynôme nul (question 1) ;
- soit P est unitaire et à pour seule racine 1. D'après l'indication de l'énoncé, P s'écrit donc dans ce cas sous la forme $(X-1)^n$, où $n \in \mathbb{N}$ est le degré de P.

Réciproquement vérifions que les polynômes ci dessus sont bien dans E c'est à dire vérifient bien la relation $(*)$:

- *1er cas :* $P = 0$. Dans ce cas, il est clair que P vérifie $(*)$
- *2^{e} cas :* $P = (X-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas $P(X^2) = (X^2-1)^n$ et $P(X+2) = \Big((X+2)-1\Big)^n = (X+1)^n$. On a donc

$$P(X)P(X+2) = (X-1)^n(X+1)^n = \Big((X-1)(X+1)\Big)^n = (X^2-1)^n = P(X^2),$$

de sorte que P vérifie $(*)$.

On en déduit que $E = \{0\} \cup \{(X-1)^n, n \in \mathbb{N}\}$.

1. Attention ! Ce n'est pas vrai si $r = 0$ (dans ce cas $r^{2^k} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$) et ce n'est pas forcément vrai si $|r| = 1$ (si $r = 1$ tous les r^{2^k} sont égaux à 1, si $r = i$ alors $r^2 = -1$ puis $r^{2^k} = 1$ dès que $k \geq 2$). Ainsi, dans le cas ou $r = 0$ ou $|r| = 1$ on ne peut en déduire que P admet une