Simulation Concours Blanc N°2

Matrices & Probas

Mardi 12 Mars 2019

Durée : 1 heure

Exercice 1. Pour tout réel, t, on pose $M(t) = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1+3t+2t^2 & 4-4t^2 & 1-3t+2t^2 \\ 1-t^2 & 4+2t^2 & 1-t^2 \\ 1-3t+2t^2 & 4-4t^2 & 1+3t+2t^2 \end{pmatrix}$

(1) Déterminer des matrices J, K, L de telles sortes que $M(t) = J + tK + t^2L$.

(2) Calculer les produits $J^2, K^2, L^2, JK, KJ, KL, LK, JL, LJ$ et en déduire, quelque soient les réels s, t, l'égalité $M(s)M(t) = M(st)$.

(3) Etudier l'inversibilité de la matrice $M(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

(4) Soit P la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.

(5) Calculer le produit $P^{-1}M(t)P$. Retrouver le résultat de la question 3.

Exercice 2. Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 1.
On a invité n personnes à une conférence mais certains invités ne pourront pas venir ; on appelle « auditoire »l'ensemble des personnes qui viennent.
On note p_k la probabilité que cet auditoire soit formé de k personnes fixées et on suppose que p_k ne dépend que de k, et pas des personnes composant cet auditoire.
On suppose aussi que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, un auditoire de k personnes est k fois plus probable qu'un auditoire d'une seule personne, c-à-d. $p_k = kp_1$.

(1) Combien y a-t-il d'auditoires différents possibles ? Combien comportent k personnes ?

(2) Montrer que $p_1 = \dfrac{1}{n2^{n-1}}$.
Soit X le nombre de personnes qui viennent et $k \in [\![1, n]\!]$.
Déterminer la probabilité que $X = k$.

(3) Quelle est la probabilité qu'un invité donné soit bien présent ?

(4) Montrer que, avec cette modélisation, les événements A : « l'invité a est présent »et B :« l'invité b est présent »ne sont pas indépendants.

(5) Les invités qui viendront ont prévenu le conférencier qui a réservé une salle qui comporte exactement le bon nombre de sièges. Une personne qui n'était pas invitée décide de venir aussi ; elle a autant de chances de trouver un siège que les personnes invitées.
Déterminer la probabilité q_n que cette personne reste debout.

FIN

Corrigé

Exercice 1. Pour tout réel, t, on pose $M(t) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1+3t+2t^2 & 4-4t^2 & 1-3t+2t^2 \\ 1-t^2 & 4+2t^2 & 1-t^2 \\ 1-3t+2t^2 & 4-4t^2 & 1+3t+2t^2 \end{pmatrix}$

(1) Déterminer des matrices J, K, L de telles sortes que $M(t) = J + tK + t^2L$.

Pour tout réel t, $M(t) = J + tK + t^2L$ où

$$J = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad L = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix},$$

(2) Calculer les produits $J^2, K^2, L^2, JK, KJ, KL, LK, JL, LJ$ et en déduire, quelque soient les réels s, t, l'égalité $M(s)M(t) = M(st)$.

$$J^2 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = J, \quad K^2 = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 18 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \\ 18 & 0 & 18 \end{pmatrix} = K, \quad L^2 = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 12 & -24 & 12 \\ -6 & 12 & -6 \\ 12 & -24 & 12 \end{pmatrix} = L$$

puis

$$JK = O, \quad KJ = O, \quad JL = O, \quad LJ = O, \quad KL = O, \quad LK = O$$

Pour tous réels s, t, on a donc

$$M(s)M(t) = J^2 + stK^2 + s^2t^2L^2 = J + stK + (st)^2L = M(st)$$

(3) Etudier l'inversibilité de la matrice $M(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

On remarque $J + K + L = I_3$ donc pour $t \neq 0, M(t)M(\frac{1}{t}) = M(t \times \frac{1}{t}) = M(1) = I_3$ donc $M(t)$ est inversible et $M(t)^{-1} = M(\frac{1}{t})$.

Pour $t = 0$, on a $M(0) = J$ et $J\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{0}$ donc $J = M(0)$ n'est pas inversible.

(4) Soit P la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3 & -3 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow 3L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow 2L_1 + 3L_2 \quad \begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

La matrice P est donc inversible et son inverse est

$$P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ -3 & 0 & 3\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

(5) Calculer le produit $P^{-1}M(t)P$. Retrouver le résultat de la question 3.

Le produit $P^{-1}M(t)$ donne

$$\begin{aligned} P^{-1}M(t) &= \frac{1}{36}\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ -3 & 0 & 3\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+3t+2t^2 & 4-4t^2 & 1-3t+2t^2\\ 1-t^2 & 4+2t^2 & 1-t^2\\ 1-3t+2t^2 & 4-4t^2 & 1+3t+2t^2\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{36}\begin{pmatrix}6 & 24 & 6\\ -18t & 0 & 18t\\ 6t^2 & -12t^2 & 6t^2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

puis le produit $P^{-1}M(t)P$ donne

$$\begin{aligned} P^{-1}M(t)P &= \frac{1}{6^2}\begin{pmatrix}6 & 24 & 6\\ -18t & 0 & 18t\\ 6t^2 & -12t^2 & 6t^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6^2}\begin{pmatrix}36 & 0 & 0\\ 0 & 36t & 0\\ 0 & 0 & 36t^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & t & 0\\ 0 & 0 & t^2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Puisque P est une matrice inversible, la matrice $M(t)$ est inversible si et seulement si $P^{-1}M(t)P$ est inversible. Etant diagonale, cette dernière est inversible si et seulement aucun coefficient de la diagonale n'est nul donc si et seulement si $t \neq 0$.

Exercice 2. Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 1.

(1) Combien y a-t-il d'auditoires différents possibles ? Combien comportent k personnes ?

Il y a 2^n auditoires possibles (en tenant compte de l'auditoire vide) et il y a $\binom{n}{k}$ auditoires composés de k personnes.

(2) Montrer que $p_1 = \dfrac{1}{n2^{n-1}}$.

Soit X le nombre de personnes qui viennent et $k \in [\![1, n]\!]$.

Déterminer la probabilité que $X = k$.

Pour k entre 0 et n, on note A_k l'événement « l'auditoire comporte k personnes. »Le système $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ est un système commplet d'événements donc $\sum_{k=1}^{n} P(A_k) = 1$. Puisque p_k est la probabilité que l'auditoire soit composé de k personnes fixées et qu'il y a $\binom{n}{k}$ auditoires formés de k personnes, on a

$$P(A_k) = \binom{n}{k} p_k$$

et puisque $p_k = kp_1$, on obtient $p_1 \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = 1$ d'où

$$p_1 = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}}.$$

Il ne reste plus qu'à simplifier la somme $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$, ce qui est classique : la formule du binôme donne $(1+X)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k$ et après dérivation, on obtient la relation polynômiale $n(1+X)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} X^{k-1}$ qui évaluée en 1 donne $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

(3) Quelle est la probabilité qu'un invité donné soit bien présent ?

Soit E l'événement « l'invité X est bien présent »et $k \in [\![1, n]\!]$. Il y a $\binom{n-1}{k-1}$ auditoires à k éléments comprenant l'invité X. La probabilité cherchée est donc

$$P(E) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p_k = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n-1}{k-1} p_1$$

Or $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n-1}{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)\binom{n-1}{j} = \sum_{j=0}^{n-1} j\binom{n-1}{j} + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j}$

et d'après le calcul déjà fait et la formule du binôme : $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n-1}{k-1} = n2^{n-2} + 2^{n-1}$ d'où

$$P(E) = \frac{(n-1)2^{n-2} + 2^{n-1}}{n2^{n-1}} = \frac{n+1}{2n}$$

(4) Montrer que, avec cette modélisation, les événements A : « l'invité a est présent »et B :« l'invité b est présent »ne sont pas indépendants.

D'une part, $P(A)P(B) = \left(\dfrac{n+1}{2n}\right)^2$ et d'autre part, le calcul de $P(A \cap B$ est analogue au calcul précédent :

$$P(A \cap B) = \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} p_k = \sum_{k=2}^{n} k \binom{n-2}{k-2} p_1.$$

Simplifions $\sum_{k=2}^{n} k \binom{n-2}{k-2}$:

$$\sum_{k=2}^{n} k \binom{n-2}{k-2} = \sum_{j=0}^{n-2} j \binom{n-2}{j} + 2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} = (n-2)2^{n-3} + 2 \times 2^{n-2}$$

donc

$$P(A \cap B) = \frac{(n-2)2^{n-3} + 2 \times 2^{n-2}}{n2^{n-1}} = \frac{n+2}{4n}.$$

Finalement

$$P(A \cap B) - P(A)P(B) = \frac{n+2}{4n} - \left(\frac{n+1}{2n}\right)^2 = \frac{n^2+2n-n^2-2n-1}{4n^2} = \frac{-1}{4n^2} \neq 0$$

donc les événements A : « l'invité a est présent »et B :« l'invité b est présent »ne sont pas indépendants.

(5) Pour k entre 0 et n, on note A_k l'événement « l'auditoire comporte k personnes. »Le système $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ est un système commplet d'événements. Notons E l'événement « la personne non invitée reste debout. » La formule des probabilités totales donne

$$P(E) = \sum_{k=0}^{n} P(A_k) P_{A_k}(E)$$

et en sachant que l'auditoire est composé de k personne, la probabilité que la personne non invitée reste debout est $P_{A_k}(E) = \dfrac{1}{k+1}$ donc finalement :

$$\begin{aligned}
P(E) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k \times \frac{1}{k+1} \\
&= p_1 \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k+1} \binom{n}{k} \\
&= p_1 \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \right) \\
&= p_1 \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1} \right) \\
&= \frac{1}{n2^{n-1}} \left(2^n - \frac{2^{n+1}-1}{n+1} \right) \\
&= \frac{2}{n} - \frac{4}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)2^{n-1}}
\end{aligned}$$