Concours Blanc N°2

Mathématiques & Informatique

Lundi 18 Mars 2019

Durée : 4 heures

Questions de Cours

1. Rappelez la formule des probabilités conditionnelles
2. Rappelez la formule des probabilités composées
3. Rappelez la formule des probabilités totales
4. Rappelez la formule de Bayes
5. Rappelez la définition de système complet d'événements
6. Rappeler la définition de $\mathrm{E}(X)$, l'espérance d'une VAR X
7. Rappeler la définition de $\mathrm{V}(X)$, la variance d'une VAR X
8. Compléter le vide $p(X=k)=\dots$, où $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$
9. Compléter le vide $\mathrm{E}(X)=\dots$, où $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$
10. Compléter le vide $\mathrm{V}(X)=\dots$, où $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$
11.

Exercices Application de Cours

Exercice 1 : Matrices

Exercice 1.1

Puissances et polynôme annulateur. — On considère la matrice $M=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

1. Déterminer deux réels α et β tels que $M^3=\alpha M^2+\beta M$.
2. Montrer qu'il existe deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $M^n=a_nM^2+b_nM$.
   On précisera les relations de récurrences vérifiées par les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente d'ordre deux puis calculer a_n en fonction de n pour tout $n\in\mathbb{N}$.
4. En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de M^n en fonction de n et des matrices M et M^2.

Exercice 1.2

Soit $m \in \mathbb{C}^*$. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ 1/m & 0 & m \\ 1/m^2 & 1/m & 0 \end{pmatrix}$.

1. a) Calculer $(A+I)(A-2I)$.

b) En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

2. On pose $B = \frac{1}{3}(A+I)$ et $C = -\frac{1}{3}(A-2I)$.

a) Calculer B^n et C^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Vérifier que $A = 2B - C$. En déduire, pour tout entier naturel non nul n, une expression de A^n en fonction de B, C et n.

c) Vérifier que la formule précédente est encore vraie pour $n = -1$ puis pour tout entier relatif $n < 0$.

Exercice 2 : Probabilités

Exercice 2.1

(*) On lance deux fois un dé équilibré. On pose $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$.

1. Trouver un libellé pour l'événement $A = \{(1;1),(2;2),(3;3),(4:4),(5;5),(6;6)\}$.
2. A quelle partie de Ω correspond l'événement $B =$" la somme des deux numéros est inférieure ou égale à 4" ?
3. Calculer la probabilité de A, B, $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$, $B - A$.

Exercice 2.2 (**) Dans une population, une personne sur 10 000 souffre d'une pathologie. Un laboratoire pharmaceutique met sur le marché un test sanguin. Celui-ci est positif chez 99 % des malades mais aussi faussement positif chez 0,1 % des personnes non atteintes. Un individu passe ce test et obtient un résultat positif. Quelle est sa probabilité d'être malade ? Qu'en conclure ?

Exercice 2.3(*) La probabilité pour une population d'être atteinte d'une maladie A est p donnée ; dans cette même population, un individu peut être atteint par une maladie B avec une probabilité q donnée aussi ; on suppose que les maladies sont indépendantes : quelle est la probabilité d'être atteint par l'une et l'autre de ces maladies ? Quelle est la probabilité d'être atteint par l'une ou l'autre de ces maladies ?

Exercice d'approfondissement :

On s'intéresse à une mutation dynamique de l'information génétique au sein d'une lignée de cellules. Pour simplifier les notations, on désigne par A, B et C les trois parties du génome touchées par la mutation. On observe les résultats suivants :

— la mutation ne touche qu'une seule partie du génome de chaque cellule à chaque génération ;

— lorsque la mutation touche A alors elle touche B ou C à la génération suivante avec la même probabilité ;

— lorsque la mutation touche B alors elle touche A ou C à la génération suivante avec la même probabilité ;

— lorsque la mutation touche C alors elle continue de toucher C à la génération suivante.

Pour toute génération $n \in \mathbb{N}^\star$ et pour chaque lettre $X \in \{A, B, C\}$, on note X_n l'événement : «la mutation touche X à la n-ième génération» et x_n la probabilité de l'événement X_n. Enfin, on suppose que la mutation touche A à la première génération, c'est-à-dire $a_1 = 1$ et $b_1 = c_1 = 0$.

1. (a) Déterminer a_2, b_2 et c_2.

   (b) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ que $a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$ et obtenir une relation similaire pour b_{n+1}.

   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, exprimer c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n (sans justifier).

   (d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ où $L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice qu'on exprimera en fonction de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   (e) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = L^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$.

2. (a) Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

   (b) Montrer que $P^{-1}MP = D + N$ où $D = \mathrm{diag}(-1, 1, 2)$ et $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice qu'on déterminera.

   (c) Calculer les produits matriciels DN, ND et N^2.

   (d) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $(D + N)^k = D^k + (2^k - 1)N$.

   (e) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, exprimer les coefficients de M^k en fonction de k.

3. En déduire des expressions des probabilités a_n, b_n et c_n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

4. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} a_n$, $\lim_{n\to+\infty} b_n$ et $\lim_{n\to+\infty} c_n$. Interpréter ce résultat.

Problème de Synthèse 1

Pour un entier naturel non nul n donné, on considère une urne contenant $2n$ boules numérotées et indiscernables au toucher :

— n boules numérotées 0
— et les n boules restantes numérotées de 1 à n.

On effectue au hasard et sans remise deux tirages successifs d'une boule dans cette urne. On note X le plus grand des deux numéros obtenus et Y le plus petit. Ce problème a deux objectifs indépendants : calculer les espérances de X et Y, et calculer la probabilité de l'événement $(X = Y + 1)$.

Partie 0 : préliminaire. On note A le premier numéro tiré et B le deuxième.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs possibles prises par A et B.
2. Déterminer la loi de probabilité de A et en déduire que son espérance est égale à $\frac{n+1}{4}$.
3. Justifier brièvement que B a la même loi de probabilité que A et en déduire son espérance.
4. Exprimer la probabilité conditionnelle $P_{(A=a)}(B = b)$ en fonction de n en distinguant plusieurs cas selon les différentes valeurs de $(a, b) \in \{0, 1, \dots, n\}^2$.

Partie 1 : calcul des espérances de X et Y.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs possibles prises par X.
2. Calculer la probabilité de l'événement $(X = 0)$.
3. On fixe un entier $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ pour cette question.
   (a) Justifier précisément que :
   $$P(X = k) = P(A = k)\sum_{b=0}^{k-1} P_{(A=k)}(B = b) + \sum_{a=0}^{k-1} P(A = a)P_{(A=a)}(B = k).$$
   (b) En utilisant les résultats du préliminaire, en déduire que $P(X = k) = \frac{n+k-1}{n(2n-1)}$.
4. Déduire des résultats précédents l'expression de l'espérance de X en fonction de n.
5. En remarquant que $X + Y = A + B$, montrer que $E(Y) = \frac{n^2-1}{6(2n-1)}$.
6. Donner un équivalent simple de $\frac{E(X)}{E(Y)}$ quand n tend vers l'infini et interpréter ce résultat.

Partie 2 : calcul de la probabilité de l'événement $(X = Y + 1)$.

1. Justifier précisément que :
$$P(X = Y + 1) = \sum_{k=1}^{n} \Big[P(A = k)P_{(A=k)}(B = k - 1) + P(A = k - 1)P_{(A=k-1)}P(B = k)\Big].$$
2. En utilisant le préliminaire, donner une expression simple de la probabilité $P(X = Y + 1)$ en fonction de n.

Problème de Synthèse 2

Cet exercice propose d'étudier la transmission d'un gène par autopollinisation (ou autogamie) chez certaines plantes hermaphrodites (comme le pêcher) et de démontrer que ce mode de fécondation favorisé par l'agriculture est moins riche en diversité génétique que l'interpollinisation (ou allogamie, par exemple par les animaux ou le vent). On s'intéresse donc à un gène présent sous la forme de deux allèles notés a et A. On suppose que le gène est autosomique, ainsi chaque plante autogame peut être ou bien homozygote (de génotype aa ou AA) ou bien hétérozygote (de génotype aA). Par autogamie, une plante homozygote donne une plante homozygote de même génotype, alors qu'une plante hétérozygote donne des plantes aussi bien homozygotes (de génotype aa ou AA) qu'hétérozygotes (tout se passe comme la fécondation de deux plantes de même génotype). On suppose qu'un parent hétérozygote transmet l'allèle a ou A de façon équiprobable, et que les deux allèles transmis sont indépendants. De plus, on néglige les modifications d'information génétique par mutation. Partant d'une plante hétérozygote, on étudie une lignée de générations successives par autogamie. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on note aa_n, AA_n et aA_n les événements d'obtenir à la n-ième génération les génotypes aa, AA et aA respectivement, et x_n, y_n et z_n leur probabilité respective (donc $x_1 = y_1 = 0$ et $z_1 = 1$).

1. On fixe $n \in \mathbb{N}^\star$ pour cette question.
   (a) Montrer que la probabilité qu'un parent hétérozygote donne par autogamie une plante homozygote de génotype aa est $\frac{1}{4}$, celle de donner une plante homozygote de génotype AA est $\frac{1}{4}$, et celle de donner une plante hétérozygote de génotype aA est $\frac{1}{2}$. En déduire les probabilités conditionnelles $P_{aA_n}(aa_{n+1})$, $P_{aA_n}(AA_{n+1})$ et $P_{aA_n}(aA_{n+1})$.
   (b) Déterminer les probabilités conditionnelles $P_{aa_n}(aa_{n+1})$, $P_{aa_n}(AA_{n+1})$ et $P_{aa_n}(aA_{n+1})$, ainsi que $P_{AA_n}(aa_{n+1})$, $P_{AA_n}(AA_{n+1})$ et $P_{AA_n}(aA_{n+1})$.
   (c) Que peut-on dire des événements aa_n, AA_n et aA_n ?
   (d) Justifier précisément que $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{4}z_n$, $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}z_n$ et $z_{n+1} = \frac{1}{2}z_n$.

   On va maintenant déterminer des expressions de x_n, y_n et z_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^\star$ en utilisant deux méthodes différentes. Les questions 2 et 3 sont donc indépendantes.
2. (1re méthode)
   (a) Exprimer z_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^\star$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum_{k=1}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)$ de deux manières différentes et en déduire une expression de x_n en fonction de n.
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, x_n = y_n$ et en déduire une expression de y_n en fonction de n.
3. (2e méthode) Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ X_{n+1} = MX_n$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ X_n = M^{n-1}X_1$
   (c) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (d) Montrer que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale D qu'on précisera.
   (e) Exprimer M^{n-1} en fonction de P, P^{-1}, D et n.
   (f) En déduire des expressions de x_n, y_n et z_n en fonction de n.
4. À l'aide des résultats précédents, déterminer les limites de x_n, y_n et z_n lorsque n tend vers $+\infty$ et conclure en interprétant ces résultats.