

Espaces Vectoriels Dimension Finie

Simulation DS N°7

CÉDRIC VILLANI VA VOUS
FAIRE AIMER LES MATHS



Exercice 1 : On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (1) Déterminer l'expression de $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en fonction de x, y, z .
- (2) Déterminer une base de $\ker(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$. L'endomorphisme f est-il injectif? surjectif?
- (3) On pose $\vec{v}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{v}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$ et $\vec{v}_3 = \vec{e}_2 - \vec{e}_3$. Montrer que la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- (4) Déterminer les coordonnées de chacun des vecteurs $f(\vec{v}_1)$, $f(\vec{v}_2)$, $f(\vec{v}_3)$ dans la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

Exercice 2 : On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'identité de $\mathbb{R}^3$ est notée $I_{\mathbb{R}^3}$ et la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est notée I_3 .

On rappelle aussi que pour un endomorphisme f d'un espace vectoriel E , les notations f^2, f^3 , etc. désignent $f \circ f, f \circ f \circ f$ etc.

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 3x + 5y - 3z \\ 3x + 6y - 4z \end{pmatrix}$

(1) (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(b) Montrer que $A^2 = A + 2I_3$. En déduire que $f^2 = f + 2I_{\mathbb{R}^3}$.

(c) Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer l'automorphisme réciproque de f en fonction de $I_{\mathbb{R}^3}$ et de f .

(2) Déterminer une base de $\ker(f - 2I_{\mathbb{R}^3})$ et une base de $\ker(f + I_{\mathbb{R}^3})$.

(3) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(f - 2I_{\mathbb{R}^3}) \oplus \ker(f + I_{\mathbb{R}^3})$.

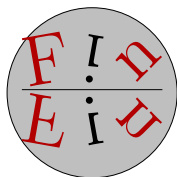
(4) (a) Déterminer des endomorphismes p, q de $\mathbb{R}^3$ tels que $\begin{cases} p + q = I_{\mathbb{R}^3} \\ 2p - q = f \end{cases}$ (On les exprimera en fonction de $I_{\mathbb{R}^3}$ et f)

(b) Montrer que p, q sont des projecteurs.

(c) Vérifier que $p \circ q = q \circ p = 0$.

(d) Montrer que $\text{Im}(p) = \ker(q)$.

(5) A l'aide de la question (4), établir que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $f^n = 2^n p + (-1)^n q$.



Corrigé

Exercice 1 :

(1)

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 2y - 2z \\ -x + 3y + z \\ -x - y + z \end{pmatrix}$$

(2) Déterminer une base de $\ker(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$. L'endomorphisme f est-il injectif? surjectif?

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(f) &\iff \begin{cases} x - y - z = 0 \\ -x + 3y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2y = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\ 2y = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Ensuite $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ mais $f(e_3) = -f(e_1)$ donc

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2))$$

et les vecteurs $f(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $f(e_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont non colinéaires donc ils forment une base de $\text{Im}(f)$.

L'application f n'est pas injective car son noyau n'est pas réduit au vecteur nul.

L'application f n'est pas surjective non plus car le vecteur $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'a pas d'antécédent par f . En effet, l'équation $f(u) = e_3$ d'inconnue u est impossible puisque

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ -x + 3y + z = 0 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2y = 0 & (L_2 + L_1) \\ 2y = 1 & (L_3 - L_1) \end{cases}$$

(3) On pose $\vec{v}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{v}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$ et $\vec{v}_3 = \vec{e}_2 - \vec{e}_3$. Montrer que la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Etudions le problème $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 + z\vec{v}_3$ qui revient au système

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x + y = a \\ -x + z = b \\ y - z = c \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = a \\ y + z = a + b \\ y - z = c \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y = a \\ y + z = a + b \\ 2y = a + b + c \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{a - b - c}{2} \\ z = \frac{a + b - c}{2} \\ y = \frac{a + b + c}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

(4) Déterminer les coordonnées de chacun des vecteurs $f(\vec{v}_1)$, $f(\vec{v}_2)$, $f(\vec{v}_3)$ dans la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

$$f(\vec{v}_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(\vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(\vec{v}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

donc

$$f(\vec{v}_1) = 4\vec{v}_1, \quad f(\vec{v}_3) = 2\vec{v}_3, \quad f(\vec{v}_2) = \vec{0}.$$

Exercice 2 :

(1) (a) L'application f est définie sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.

$$\text{On a } f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ où } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 3 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

Les règles du calcul matriciel impliquent alors la linéarité de f qui est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, puisque quelque soient les vecteurs $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et quelque soit le réel λ , on a

$$f(\lambda u + v) = A(\lambda u + v) = \lambda Au + Av = \lambda f(u) + f(v).$$

(b) On trouve $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -3 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ donc $A^2 = A + 2I_3$.

Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Puisque $f(u) = Au$, on a $f \circ f(u) = A(Au) = A^2u$ donc $f^2(u) = A^2u$.

La relation matricielle vérifiée par A implique alors $\forall u \in \mathbb{R}^3$, $A^2u = Au + 2u$

donc $\forall u \in \mathbb{R}^3$, $f^2(u) = f(u) + 2u$ d'où la relation $f^2 = f + 2I_{\mathbb{R}^3}$.

(c) La relation obtenue précédemment se réécrit encore $f^2 - f = 2I_{\mathbb{R}^3}$ donc $f \circ \frac{1}{2}(f - I_{\mathbb{R}^3}) = I_{\mathbb{R}^3}$ ce qui prouve que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et son automorphisme réciproque est $f^{-1} = \frac{1}{2}(f - I_{\mathbb{R}^3})$.

(b) $p \circ p = \frac{1}{9}(I_{\mathbb{R}^3} + f)^2 = \frac{1}{9}(I_{\mathbb{R}^3} + 2f + f^2) = \frac{1}{9}(3I_{\mathbb{R}^3} + 3f) = \frac{1}{3}(I_{\mathbb{R}^3} + f) = p$ et même calcul pour q .

(c) On trouve $p \circ q = \frac{1}{9}(I_{\mathbb{R}^3} + f) \circ (2I_{\mathbb{R}^3} - f) = \frac{1}{9}(2I_{\mathbb{R}^3} + f - f^2) = 0$ puisque $f^2 = f + 2I_{\mathbb{R}^3}$ et même calcul pour $q \circ p$.

(d) Montrer que $\text{Im}(p) = \ker(q)$.

Montrons que $\text{Im}(p) \subset \ker(q)$.

Soit $y \in \text{Im}(p)$. Il existe $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $y = p(x)$. Or $q \circ p = 0$ donc $q(y) = q(p(x)) = 0$ donc $y \in \ker(q)$.

Montrons maintenant $\ker(q) \subset \text{Im}(p)$. Soit $y \in \ker(q)$. Donc $q(y) = 0$ donc $f(y) = 2y$ d'après (4). Mais $f(y) = 2p(y) - q(y) = 2p(y)$ donc $p(y) = y \in \text{Im}(p)$.

Par double inclusion, $\text{Im}(p) = \ker(q)$.

(5) A l'aide de la question (4), établir que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $f^n = 2^n p + (-1)^n q$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}_n$ la propriété : « $f^n = 2^n p + (-1)^n q$ »

— Pour $n = 0$ et $n = 1$, la propriété est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

On a

$$f^{n+1} = f^n \circ f = (2^n p + (-1)^n q) \circ (2p - q) = 2^{n+1} p^2 - 2^n p \circ q + 2(-1)^n q \circ p + (-1)^{n+1} q^2 = 2^{n+1} p + (-1)^{n+1} q$$

Ainsi, la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie dès que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

— D'après le principe de récurrence sur $\mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n = 2^n p + (-1)^n q$.

