Simulation DS N°8

Probabilités Discrètes
Séries Numériques

edhec S 2015

Partie 1

Dans cette partie, la lettre r désigne un entier naturel et x est un réel fixé de $]0,1[$.

1. Montrer que lorsque n est au voisinage de $+\infty$, on a : $\binom{n}{r} \sim \dfrac{n^r}{r!}$.
2. (a) Donner la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^{r+2}\, x^n$.

   (b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_n \binom{n}{r}\, x^n$ est convergente.
3. Pour tout entier naturel r, on pose : $S_r = \displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r}\, x^n$

   (a) Donner la valeur de S_0.

   (b) Etablir, en utilisant la formule du triangle de Pascal, que : $(1-x)\, S_{r+1} = x\, S_r$.

   (c) En déduire que : $\forall x \in]0,1[\ ,\ \forall r \in \mathbb{N}\ , S_r = \dfrac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$.

   (d) Donner enfin la valeur de $\displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r}\, x^{n-r}$.

Partie 2

On désigne par α et p deux réels de $]0,1[$. Un joueur participe à un jeu constitué d'une suite de manches.
Avant chaque manche y compris la première, le joueur a une probabilité α de ne pas être autorisé à jouer la manche en question, (on dit qu'il est disqualifié, et c'est définitif), et une probabilité $1-\alpha$ d'y être autorisé, et ceci indépendamment du fait qu'il ait gagné ou perdu la manche précédente s'il y en a eu une. A chaque manche jouée, le joueur gagne un euro avec la probabilité p et perd un euro avec la probabilité $1-p$.
Si le jeu a commencé, le joueur joue jusqu'à ce qu'il soit disqualifié, et on suppose que les manches sont jouées de façon indépendantes. On note :

• X le nombre de manches jouées par le joueur avant d'être disqualifié.
• Y le nombre de manches gagnées par le joueur.
• G le gain du joueur à la fin du jeu.

On admet que X, Y et G sont des variables aléatoires réelles définies toutes les trois sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. (a) Donner la loi de X. (On pourra noter D_k l'événement "Le joueur ne joue pas la $k$ème manche").
   (b) On pose $T = X + 1$. Reconnaître la loi de T.
   (c) En déduire que X admet une espérance et une variance et préciser leur valeur.
   (d) Compléter le programme suivant afin que soit affichée la valeur prise par X.
   ```
   a=input('entrer alpha')
   x=....
   r=rand()
   while ....
   ....
   ....
   end
   disp(x)
   ```
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $P_{(X=n)}(Y = k)$ (on pensera à distinguer deux cas pour k).
   (b) Que deviennent ces probabilités lorsque $n = 0$?
   (c) A l'aide de la formule des probabilités totales et de la *partie 1*, en déduire que :
   pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k) = \beta^k(1-\beta)$ avec $\beta = \dfrac{p(1-\alpha)}{\alpha + p - \alpha p}$.
3. Calculer l'espérance de Y.
4. (a) Exprimer G en fonction de X et Y.
   (b) En déduire l'espérance de G.
5. Compléter le programme de la question 1.(d) afin de simuler toute l'expérience.
   Faire afficher les valeurs de X, Y et G.

Fin

Partie 1

1. Pour $n \geq r$, $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!}$, or $n(n-1)\dots(n-r+1) \sim n^r$ (r facteurs équivalents à n). Donc $\binom{n}{r} \sim \dfrac{n^r}{r!}$.
2. (a) pour tout $x \in]0,1[$, les croissances comparées assurent que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{r+2}x^n = 0$.

   (b) $n^2\binom{n}{r}x^n \sim \frac{n^{r+2}}{r!}x^n = \frac{1}{r!}n^{r+2}x^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\binom{n}{r}x^n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ en $+\infty$. Comme la série de Riemann à termes positifs $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, le critère de négligeabilité assure la convergence de la série $\sum \binom{n}{r}x^n$.
3. (a) $S_0 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 1 \times x^n = \frac{1}{1-x}$ (on reconnaît une série géométrique, avec $x \in]0,1[$).

   (b) $(1-x)S_{r+1} = \sum\limits_{n=r+1}^{+\infty}\binom{n}{r+1}x^n - \sum\limits_{n=r+1}^{+\infty}\binom{n}{r+1}x^{n+1}$ on pose $m = n-1$ dans la première somme
   $= \sum\limits_{m=r}^{+\infty}\binom{m+1}{r+1}x^{m+1} - \sum\limits_{n=r+1}^{+\infty}\binom{n}{r+1}x^{n+1}$ on revient à la lettre muette n pour assembler les deux sommes
   $= \sum\limits_{n=r}^{+\infty}\left[\binom{n+1}{r+1} - \binom{n}{r+1}\right]x^{n+1} + \binom{r}{r+1}x^{r+1} = \sum\limits_{n=r}^{+\infty}[\binom{n}{r}]x^{n+1} + 0$ car d'après la formule de Pascal $\binom{n+1}{r+1} - \binom{n}{r+1} = \binom{n}{r}$ et de plus $\binom{r}{r+1} = 0$. On obtient bien : $(1-x)S_{r+1} = xS_r$.
   Ou partir de xS_r, et utiliser directement la formule du triangle de Pascal à l'intérieur, avant de séparer les deux sommes ...

   (c) $S_{r+1} = \frac{x}{1-x}S_r$ Donc (S_r) est une suite géométrique de raison $\frac{x}{1-x}$ et de premier terme S_0.
   D'où $S_r = (\frac{x}{1-x})^r S_0 = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$. Ou par récurrence sur r (ou itération).

   (d) Et en divisant par x^r non-nul (linéarité des séries convergentes) : $\forall x \in]0,1[$, $\sum\limits_{n=r}^{+\infty}\binom{n}{r}x^{n-r} = \dfrac{1}{(1-x)^{r+1}}$.

Partie 2

1. (a) Comme le joueur peut ne jamais jouer, mais peut attendre aussi longtemps avant d'être disqualifié, $X(\Omega) = \mathbb{N}$. $P(X=0) = P(D_1) = \alpha$, et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X=k) = P(\overline{D_1} \cap \overline{D_2} \cap \dots \cap \overline{D_k} \cap D_{k+1})$, et par la formule des probabilités composées, $P(X=k) = P(\overline{D_1})P_{\overline{D_1}}(\overline{D_2})P_{\overline{D_1}\cap\overline{D_2}}(\overline{D_3})\dots P_{\overline{D_1}\cap\overline{D_2}\cap\dots\cap\overline{D_k}}(D_{k+1}) = (1-\alpha)^k\alpha$, formule encore valable si $k=0$.

   (b) Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$, $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $P(T=k) = P(X+1=k) = P(X=k-1) = (1-\alpha)^{k-1}\alpha$, donc T suit la loi géométrique de paramètre α.

   (c) Comme $X = T-1$ et $E(T) = \frac{1}{\alpha}$, on a, par linéarité, X possède une espérance, et $E(X) = \frac{1}{\alpha} - 1 = \frac{1-\alpha}{\alpha}$. et de même, $X = T-1$ entraîne $V(X)$ existe et $V(X) = V(T) = \frac{1-\alpha}{\alpha^2}$.

   (d) `x=0; r=rand() ; while r> a, x=x+1, r=rand(), end`
2. (a) Si $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement $[X=n]$ entraîne que le joueur participe à n partie(s) indépendante(s) avec une même probabilité de succès p. Son nombre de succès Y suit alors la loi binomiale de paramètres n et p. Donc $P_{(X=n)}(Y=k) = \begin{cases} \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$

   (b) Cas $n=0$, l'événement $[X=0]$ entraîne l'événement $[Y=0]$ puisque le joueur ne joue jamais donc $P_{(X=0)}(Y=k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ Donc le 2.(a) reste vrai pour $n=0$.

   (c) $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, et le système complet d'événements $([X=n])_{n\in\mathbb{N}}$ permet d'écrire, à l'aide de la formule des probabilités totales, pour tout k de $\mathbb{N}$, $P(Y=k) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}P(X=n)P_{[X=n]}(Y=k)$
   $= 0 + \sum\limits_{n=k}^{+\infty}(1-\alpha)^n\alpha\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \alpha(\frac{p}{1-p})^k \times \sum\limits_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}[(1-\alpha)(1-p)]^n$. On reconnait la somme S_k de la partie 1 avec $x = (1-\alpha)(1-p) \in]0,1[$: $P(Y=k) = \alpha\left(\frac{p}{1-p}\right)^k \times \frac{[(1-\alpha)(1-p)]^k}{[1-(1-\alpha)(1-p)]^{k+1}} = \frac{\alpha p^k(1-\alpha)^k}{(\alpha+p-\alpha p)^{k+1}}$
   $= \left(\frac{p-\alpha p}{\alpha+p-\alpha p}\right)^k \times \frac{\alpha}{\alpha+p-\alpha p}$. Posons $\beta = \frac{p-\alpha p}{\alpha+p-\alpha p}$. Alors on vérifie : $1-\beta = \frac{\alpha+p-\alpha p-p+\alpha p}{\alpha+p-\alpha p} = \frac{\alpha}{\alpha+p-\alpha p}$.
   d'où $P(Y=k) = \beta^k(1-\beta)$ avec $\beta = \dfrac{p(1-\alpha)}{\alpha+p-\alpha p}$.
3. Soit s'inspirer du 1.(b) : $Y+1$ suit la loi géométrique de paramètre $1-\beta$, $E(Y)$ existe et vaut $\frac{1}{1-\beta} - 1 (= \frac{p(1-\alpha)}{\alpha})$.
   Soit dire directement qu'en remplaçant α par $1-\beta$ on passe de la loi de X à la loi de Y, d'où le résultat.
   Soit faire les calculs à la main (mais garder la lettre β) : ne pas oublier la convergence absolue !
4. (a) Le joueur joue X parties : il gagne Y parties et en perd $X-Y$, donc $G = Y - (X-Y) = 2Y - X$.

   (b) Par linéarité, $E(G) = 2E(Y) - E(X) = ...$

(c) `programme du 1.(d)` puis `p = input('entrez la valeur de p :')`

```
y=0 ;
for i=1:x,
if rand()<p then, y=y+1, end,
end, disp(y), disp(2y-x)
```

Variante avec une seule boucle où je détaille les rand() :

```
a= input('entrer alpha') ; p = input('entrez la valeur de p :')
x=0; r=rand() ; s= rand();
while r> a,
x=x+1,
if s<p then y=y+1, (else y=y), end
r=rand(), s=rand()
end
disp(y), disp(2y-x)
```