– Devoir maison n° 1 –

Partie 1

On considère la suite définie par $u_0 = \ln(2)$ et $u_{n+1} = \ln(2e^{u_n} - 1)$ pour tout $n \geq 0$.

1. Montrer que la suite est bien définie, en montrant par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et $u_n > 0$.
2. On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(2e^x - 1)$.
   (a) Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (c) Etudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^+$.
3. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} \geq u_n \geq 0$.
4. Dans cette question on souhaite montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ n'est pas majorée. Pour cela, on suppose qu'elle l'est et on essaie d'arriver à une contradiction. *On appelle ce type de raisonnement un raisonnement par l'absurde*, nous en reparlerons très bientôt.

   Dans la suite de cette question, on suppose donc que la suite est majorée.

   (a) En déduire que la suite est convergente vers une limite ℓ.
   (b) Justifier que ℓ doit vérifier la relation
   $$\ell = \ln(2e^{\ell} - 1).$$
   (c) Déterminer ℓ.
   (d) Conclure.
5. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Partie 2

On considère la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par $v_n = e^{u_n} - 1$.

6. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est géométrique et en déduire l'expression explicite de son terme général en fonction de n.
7. En déduire une expression de u_n en fonction de n pour tout $n \geq 0$.
8. Proposer alors une autre manière de déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.
9. Déterminer la valeur de a tel que
$$\sum_{k=0}^{5} u_k = \ln(a).$$

Proposition de solutions

Solution Partie 1

1. Raisonnons par récurrence. Pour tout $n \geq 0$, on pose $\mathcal{P}(n)$: "u_n est bien défini et $u_n > 0$".
Initialisation : D'après l'énoncé, $u_0 = \ln(2)$ donc u_0 est bien défini et comme $\ln(2) > 0$, $u_0 > 0$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \geq 0$ fixé. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Comme u_n est bien défini, cela a un sens de considérer $2e^{u_n} - 1$. De plus, $u_n > 0$ donc par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $e^{u_n} > e^0 = 1$ et alors $2e^{u_n} - 1 > 1 > 0$. Ainsi, puisque la fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_*^+$, $u_{n+1} = \ln(2e^{u_n} - 1)$ est bien défini. Puis, comme la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$, $u_{n+1} = \ln(2e^{u_n} - 1) > \ln(1) = 0$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, pour tout $n \geq 0$, u_n est bien défini et $u_n > 0$.

2. (a) La fonction $x \mapsto 2e^x - 1$ est bien définie sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $[1, +\infty[\subset \mathbb{R}_*^+$. La fonction ln étant définie sur $\mathbb{R}_*^+$, par composition, f est définie sur $\mathbb{R}_+$.
Conclusion : f est définie sur $\mathbb{R}^+$.
(b) On sait que $2e^x - 1 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc par composition, comme $\ln(X) \underset{X \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Conclusion : $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.
(c) Par le même raisonnement qu'à la question 2.a., on montre que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ car la fonction exponentielle l'est sur $\mathbb{R}^+$ et la fonction logarithme l'est sur $\mathbb{R}_*^+$.
Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a $f'(x) = \frac{2e^x}{2e^x - 1}$. Or, par croissance et positivité de l'exponentielle, $2e^x - 1 \geq 0$ et $2e^x \geq 0$.
Conclusion : f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

3. Raisonnons par récurrence. Pour tout $n \geq 0$, on pose $\mathcal{P}(n)$: "$u_{n+1} \geq u_n \geq 0$".
Initialisation : L'énoncé nous donne $u_0 = \ln(2)$ et nous pouvons calculer $u_1 = \ln(2e^{u_0} - 1) = \ln(3)$. Comme la fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}_*^+$, on a $\ln(3) \geq \ln(2) \geq \ln(1) = 0$ i.e $u_1 \geq u_0 \geq 0$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \geq 0$ fixé. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Montrons qu'alors, $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi. On a :
$$u_{n+2} = \ln(2e^{u_{n+1}} - 1) = f(u_{n+1}).$$
Or, d'après la question 2.c, la fonction f est croissante et d'après l'hypothèse de récurrence, $u_{n+1} \geq u_n$. Ainsi,
$$u_{n+2} = f(u_{n+1}) \geq f(u_n) = u_{n+1}.$$
Par ailleurs, comme $u_n \geq 0$ par hypothèse de récurrence, comme f est croissante et $f(0) = 0$, on a également $f(u_n) \geq f(0)$ soit $u_{n+1} \geq 0$.
Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} \geq u_n \geq 0$.

4. (a) On a supposé que la suite est majorée et on sait qu'elle est croissante d'après la question 3. D'après le théorème de la limite monotone, elle est donc convergente vers une limite ℓ.
(b) Comme la suite est convergente, en passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, puisque f est continue sur $\mathbb{R}^+$ (car dérivable), il vient $\ell = f(\ell)$.
Remarque : L'argument de continuité est fondamental. Nous verrons prochainement pourquoi.
Conclusion : $\ell = \ln(2e^\ell - 1)$.
(c) Résolvons l'équation. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
$$\ell = \ln(2e^\ell - 1) \iff e^\ell = 2e^\ell - 1 \iff e^\ell = 1 \iff \ell = 0.$$
Conclusion : $\ell = 0$.
(d) Comme $u_0 = \ln(2) > 0$ et que la suite est croissante (question 3.), elle ne peut pas converger vers 0. On arrive à une absurdité.
Conclusion : Nous avons démontré par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ n'est pas majorée.

5. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante (question 3.) et non majorée (question 4.), d'après le théorème de la limite monotone, elle diverge donc vers $+\infty$.
Conclusion : La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ diverge vers $+\infty$.

Partie 2

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$v_{n+1} = e^{u_{n+1}} - 1 = e^{\ln(2e^{u_n}-1)} - 1 = 2e^{u_n} - 2 = 2(e^{u_n} - 1) = 2v_n.$$
Ainsi, la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est géométrique de raison 2. Son premier terme est $v_0 = e^{u_0} - 1 = 1$.
Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \geq 0,\ v_n = 2^n.}$
2. Sot $n \geq 0$. On a donc $2^n = e^{u_n} - 1$ donc $u_n = \ln(1+2^n)$.
Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \geq 0,\ u_n = \ln(1+2^n).}$
3. Comme $2 > 1$, $2^n + 1 \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$. Comme $\ln(N) \underset{N\to+\infty}{\to}$, par composition, $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$.
Conclusion : $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geq 0} \text{ diverge vers } +\infty.}$
4. On a
$$\sum_{k=0}^{5} u_k = \sum_{k=0}^{5} \ln(1+2^k) = \ln\left(\Pi_{k=0}^{5}(1+2^k)\right) = \ln(2\times 3\times 5\times 9\times 17\times 33) = \ln(151470).$$
Conclusion : $\boxed{\sum_{k=0}^{5} u_k = \ln(a) \text{ pour } a = 151470.}$