Devoir Maison N°2
Nombres Complexes

Exercice 1. - Calculons vite et bien !

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $|z| + \overline{z} = 6 - 2i$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C} - \{2\}$ l'équation $\left(\frac{z-3i}{z+2}\right)^2 + 6\left(\frac{z-3i}{z+2}\right) + 13 = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $4x - 2 \leq \sqrt{x+3}$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ et en fonction du paramètre réel m l'équation $e^{2x} - 2me^x + (2m-1) = 0$.

Exercice 2. Soit un réel $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx} = 2^n \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n e^{i\frac{nx}{2}}.$$
2. En déduire, pour tout entier n, les valeurs respectives des sommes suivantes :
$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) \quad \text{et} \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx).$$
3. Montrer finalement que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \cos(kx) = n\cos(x)C_{n-1}(x) - n\sin(x)S_{n-1}(x),$$
puis que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \cos(kx) = n2^{n-1}\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{n-1} \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right).$$

Proposition de solutions

Solution 1 1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Il existe donc a et b deux réels tels que $z = a + ib$. Alors,

$$\begin{aligned}
|z| + \overline{z} = 6 - 2i &\Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} + a - ib = 6 - 2i \\
&\Leftrightarrow \left(\sqrt{a^2+b^2} + a - 6\right) + i(2-b) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2+b^2} + a - 6 = & 0 \\ 2 - b = & 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2+4} = 6 - a \\ 2 = b \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 6 - a \geq 0 \text{ et } a^2 + 4 = (6-a)^2 \\ b = 2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 6 \text{ et } 12a = 32 \\ b = 2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a & = \frac{8}{3} \\ b & = 2 \end{cases}
\end{aligned} \tag{1}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Cette équation admet une unique solution : } \mathcal{S} = \{\frac{8}{3} + 2i\}.}$

2. Soit $z \in \mathbb{C} - \{2\}$. On pose $Z = \frac{z-3i}{z+2}$. On a alors :

$$\left(\frac{z-3i}{z+2}\right)^2 + 6\left(\frac{z-3i}{z+2}\right) + 13 = 0 \Leftrightarrow Z^2 + 6Z + 13 = 0.$$

Résolvons alors cette équation d'inconnue Z. Le discriminant vaut $\Delta = 36 - 4 \times 13 = -16 < 0$ (et donc $\Delta = (4i)^2$). Il y a donc deux solution complexes :

$$Z_1 = \frac{-6-4i}{2} = -3 - 2i \text{ et } Z_2 = \frac{-6+4i}{2} = -3 + 2i.$$

On résout alors :

$$\begin{aligned}
&\frac{z-3i}{z+2} = -3 - 2i \\
&\Leftrightarrow z - 3i = (-3-2i)z + 2(-3-2i) \\
&\Leftrightarrow z(4+2i) = -6 - i \\
&\Leftrightarrow z = \frac{-6-i}{4+2i} \\
&\Leftrightarrow z = \frac{(-6-i)(4-2i)}{16+4} \\
&\Leftrightarrow z = \frac{-13+4i}{10}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Puis, de la même manière, on trouve :

$$\frac{z-3i}{z+2} = -3 + 2i \Leftrightarrow z = \frac{-19+8i}{10}.$$

Les deux complexes trouvés étant différents de 2, ce sont les solutions recherchées.

Conclusion : $\boxed{\text{L'équation étudiée admet deux solutions : } \mathcal{S} = \{\frac{-13+4i}{10}, \frac{-19+8i}{10}\}.}$

3. Pour commencer, l'équation est bien définie dès lors que $x + 3 \geq 0$. Les solutions sont donc à chercher dans $[-3, +\infty[$.

Raisonnons maintenant par disjonction des cas. Si $4x - 2 \leq 0$, alors l'équation est toujours vraie (car une racine carrée est toujours positive). Ainsi, l'ensemble $[-3, \frac{1}{2}]$ est inclus dans l'ensemble solution. Si $4x - 2 \geq 0$, (c'est à dire sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$) alors, par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$, on a :

$$4x - 2 \leq \sqrt{x+3} \Leftrightarrow (4x-2)^2 \leq x + 3 \Leftrightarrow 16x^2 - 17x + 1 < 0.$$

Le calcul du discriminant $\Delta = 17^2 - 4 \times 16 = 15^2$ permet de montrer que l'équation obtenue admet deux racines réelles qui sont $x_1 = \frac{1}{16}$ et $x_2 = 1$. Le trinôme étudié étant négatif à l'intérieur de ses racines, on obtient que sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$, l'ensemble solution est $[\frac{1}{2}, 1]$ puisque $\frac{1}{6} < \frac{1}{2}$.

Conclusion : $\boxed{\text{Pour cette inéquation, on a : } \mathcal{S} = [-3, 1].}$

4. L'équation est définie sur $\mathbb{R}$. Posons $X = e^x$. L'équation devient $X^2 - 2mX + (2m-1) = 0$ à étudier sur $\mathbb{R}_+^*$ car $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Le discriminant vaut $\Delta = (-2m)^2 - 4(2m-1) = 4m^2 - 8m + 4 = (2(m-1))^2 = (2|m-1|)^2$. Ainsi,
   (a) Si $m = 1$, il y a une unique solution $X = 1 > 0$ qui donne une unique solution $x = \ln(X) = 0$.
   (b) Si $m \neq 1$, il y a à priori deux solutions qui sont $X_1 = \frac{2m+2\sqrt{(m-1)^2}}{2} = m + |m-1|$ et $X_2 = \frac{2m-2\sqrt{(m-1)^2}}{2} = m - |m-1|$. Il vient alors :
      i. Si $m < 1$, alors $X_1 = 1$ donne $x_1 = 0$ et $X_2 = 2m-1$ donne $x_2 = \ln(2m-1)$ si $m > \frac{1}{2}$ et pas de solution car $X_2 \leq 0$ si $m \leq \frac{1}{2}$.
      ii. Si $m > 1$, alors $X_1 = 2m-1$ donne $x_2 = \ln(2m-1)$ et $X_2 = 1$ donne $x_1 = 0$.

Conclusion : $\boxed{\text{Si } m = 1 \text{ ou si } m \leq \frac{1}{2} \text{ l'équation admet 0 comme unique solution.}}$

$\boxed{\text{Si } m > \frac{1}{2} \text{ et } m \neq 1, \text{ alors l'équation admet deux solutions qui sont 0 et } \ln(2m-1).}$

Solution 2 1. On a d'après la formule du binôme de Newton : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^{ix})^k = (e^{ix}+1)^n.$$

En utilisant la méthode de l'angle médian puis une formule d'Euler, on trouve

$$e^{ix} + 1 = e^{\frac{ix}{2}} \left(e^{i\frac{x}{2}} + e^{-i\frac{x}{2}} \right) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}}.$$

On en déduit alors que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx} = \left(2\cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}}\right)^n = 2^n \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n e^{i\frac{nx}{2}}.$$

2. On a, pour tout entier n,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathcal{R}e(e^{ikx}) = \mathcal{R}e\Big[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx} \Big] = \mathcal{R}e\left[2^n \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n e^{i\frac{nx}{2}}\right].$$

On trouve donc : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$C_n(x) = 2^n \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n \cos\left(\frac{nx}{2}\right).$$

Et de même (en considérant bien sûr la partie imaginaire) : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$S_n(x) = 2^n \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n \sin\left(\frac{nx}{2}\right).$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a d'après la formule du chef puis le changement d'indice $[k' = k-1]$,

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \cos(kx) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \cos(kx) = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} \cos(kx) = n\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cos((k+1)x).$$

Or : $\forall k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $\cos((k+1)x) = \cos(kx)\cos(x) - \sin(kx)\sin(x)$. En injectant cette égalité dans la précédente (et avec les notations de la question 2.), on en déduit que :

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \cos(kx) = n\cos(x)C_{n-1}(x) - n\sin(x)S_{n-1}(x).$$

   (b) Ainsi on obtient d'après la question 2.,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \cos(kx) &= n2^{n-1} \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{n-1} \left[\cos(x)\cos\left(\frac{(n-1)x}{2}\right) - \sin(x)\sin\left(\frac{(n-1)x}{2}\right)\right] && (3) \\ &= n2^{n-1} \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{n-1} \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right). && (4) \end{aligned}$$

Fin