Suites Numériques

Devoir Vacances N°3

Exercice 1

Soit $a > 0$. On définit la suite u par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2u_n}(u_n - \sqrt{a})^2$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \sqrt{a}$.
3. Montrer que u est monotone à partir du rang 1 et déterminer son sens de monotonie.
4. Montrer que la suite u est convergente.
5. Déterminer la limite de la suite u.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \sqrt{a} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}(u_n - \sqrt{a})^2$.
7. À partir de maintenant, on pose $a = 10$ et $u_0 = 4$. On souhaite calculer une valeur approchée de $\sqrt{10}$.
   a) Montrer que $u_1 - \sqrt{10} \leqslant \frac{1}{4}$ *(comparer avec $u_1 - \sqrt{9}$).*
   b) En utilisant la question 6, montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$0 \leqslant u_n - \sqrt{10} \leqslant \frac{2\sqrt{10}}{(8\sqrt{10})^{2^{n-1}}}.$$
   c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n - \sqrt{10} \leqslant \frac{8}{24^{2^{n-1}}}$.
   d) On admet que $\frac{8}{24^8} < 10^{-9}$.
   Écrire un programme `Scilab` qui renvoie une valeur approchée à 10^{-9} près de $\sqrt{10}$ à l'aide de la suite u *(renvoyer la valeur de u_n pour une valeur de n bien choisie d'après ce qui précède).*
   Le programme pourra commencer par `format(20)` pour augmenter la précision des calculs.

Exercice 2

On définit les deux suites réelles u et v par $u_1 = 1$, $v_1 = 12$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$.

De plus on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = v_n - u_n$.

1. Trouver une relation de récurrence vérifiée par w.
2. Déterminer une expression de w_n. En déduire la limite de w.
3. Montrer que les suites u et v sont adjacentes.
4. Déterminer les limites des suites en considérant la suite t définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ t_n = 3u_n + 8v_n.$$

Corrigé

Exercice 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - \sqrt{a} = \frac{u_n^2 + a - 2u_n\sqrt{a}}{2u_n} = \frac{1}{2u_n}(u_n - \sqrt{a})^2$.

2. Par récurrence :
- d'après la question précédente, $u_1 - \sqrt{a} = \frac{1}{2u_0}(u_0 - \sqrt{a})^2 \geqslant 0$ donc $u_1 - \sqrt{a} \geqslant 0$;
- supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \sqrt{a} > 0$; alors $u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2u_n}(u_n - \sqrt{a})^2 \geqslant 0$.

Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \sqrt{a}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + a - 2u_n^2}{2u_n} = \frac{a - u_n^2}{2u_n} = \frac{(\sqrt{a} - u_n)(\sqrt{a} + u_n)}{2u_n} \leqslant 0$. Donc la suite u est décroissante à partir du rang 1.

4. À partir du rang 1, la suite u est décroissante et minorée par $\sqrt{a}$ donc elle converge vers un réel $\ell \geqslant \sqrt{a}$.

5. On a :
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$;
- $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$;
- la fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ comme somme de fonctions continues ;

alors on a $f(\ell) = \ell$ c'est-à-dire $\frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right) = \ell$ qui équivaut à $\frac{a - \ell^2}{\ell} = 0$ c'est-à-dire $\ell = \sqrt{a}$ puisque $\ell > 0$. $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{a}}$.

6. D'après la question 2, $u_n \geqslant \sqrt{a}$ donc $\frac{1}{u_n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{a}}$.

On obtient donc, avec la question 1, que $u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2u_n}(u_n - \sqrt{a})^2 \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}(u_n - \sqrt{a})^2$.

7. a) Puisque $\sqrt{9} \leqslant \sqrt{10}$, $u_1 - \sqrt{10} \leqslant u_1 - \sqrt{9} = \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{10}{u_0}\right) - 3 = \frac{13}{4} - 3 = \frac{1}{4}$.

b) Déjà, d'après la question 2, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - \sqrt{10} \geqslant 0$.
Pour la majoration, prouvons-la par récurrence :
- pour $n = 1$, $u_1 - \sqrt{10} \leqslant \frac{1}{4}$ or $\frac{2\sqrt{10}}{(8\sqrt{10})^{2^{1-1}}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$;
- supposons que, pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, $u_n - \sqrt{10} \leqslant \frac{2\sqrt{10}}{(8\sqrt{10})^{2^{n-1}}}$. Avec la question 6,

$$u_{n+1} - \sqrt{10} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{10}}(u_n - \sqrt{10})^2 \leqslant \frac{1}{2\sqrt{10}} \frac{(2\sqrt{10})^2}{\left((8\sqrt{10})^{2^{n-1}}\right)^2} = \frac{2\sqrt{10}}{(8\sqrt{10})^{2^n}}.$$

Par le principe de de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - \sqrt{10} \leqslant \frac{2\sqrt{10}}{(8\sqrt{10})^{2^{n-1}}}$.

c) Il suffit de montrer que $2\sqrt{10}\leqslant 8$ et $8\sqrt{10}\geqslant 24$. Or $9\leqslant 10\leqslant 16$ donc, par croissante de la fonction $\sqrt{\ }$, $3\leqslant\sqrt{10}\leqslant 4$. On en déduit que $2\sqrt{10}\leqslant 8$ et $8\sqrt{10}\geqslant 24$. Alors, par croissance de la fonction $t\mapsto t^{2^{n-1}}$, $(8\sqrt{10})^{2^{n-1}}\geqslant 24^{2^{n-1}}$ donc $0\leqslant u_n-\sqrt{10}\leqslant\dfrac{2\sqrt{10}}{(8\sqrt{10})^{2^{n-1}}}\leqslant\dfrac{8}{24^{2^n-1}}$.

d) D'après le résultat précédent, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $0\leqslant u_n-\sqrt{10}\leqslant\dfrac{8}{24^{2^{n-1}}}$ donc pour $n=4$ on obtient $0\leqslant u_4-\sqrt{10}\leqslant\dfrac{8}{24^{2^3}}=\dfrac{8}{24^8}\leqslant 10^{-9}$. Cela signifie que u_4 est une valeur approchée de $\sqrt{10}$ à 10^{-9} près. Pour la calculer on peut écrire le programme suivant.

```
format(20);
u=4;
n=4;
a=10;
for i=0:n-1
     u=1/2*(u+a/u);
end
disp(u);
```

Exercice 2

1. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $w_{n+1}=v_{n+1}-u_{n+1}=\dfrac{4(u_n+2v_n)-3(u_n+3v_n)}{12}=\dfrac{u_n-v_n}{12}=\dfrac{1}{12}w_n$.
On en déduit que la suite w est géométrique de raison $\dfrac{1}{12}$.

2. On a donc $\boxed{w_n=w_1\left(\dfrac{1}{12}\right)^{n-1}=\dfrac{11}{12^{n-1}}}$.
Comme la raison de cette suite géométrique est dans $]-1,1[$, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=0}$.

3. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n+2v_n}{3}-u_n=\dfrac{2}{3}(v_n-u_n)=\dfrac{2}{3}w_n>0$ étant donné l'expression de w_n. Donc la suite u est croissante.
$v_{n+1}-v_n=\dfrac{u_n-v_n}{4}=-\dfrac{w_n}{4}<0$ donc la suite v est décroissante.
De plus nous avons vu que $v_n-u_n=w_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.
Donc les suites u et v sont adjacentes.

4. Par le théorème des suites adjacentes, u et v convergent vers la même limite $\ell\in[u_1,v_1]=[1,12]$.
Pour $n\in\mathbb{N}$,

$$t_{n+1}=3u_{n+1}+8v_{n+1}=\frac{3(u_n+2v_n)+6(u_n+3v_n)}{3}=\frac{9u_n+24v_n}{3}=3u_n+8v_n=t_n.$$

On en déduit que la suite t est constante, soit $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $t_n=t_1=99$.
De plus $t_n=3u_n+8v_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}3\ell+8\ell=11\ell$ donc $11\ell=99$ c'est-à-dire $\ell=9$.
$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=9}$.