Suites Numériques

Devoir Vacances N°3 Bis

Exercice 1

0. *Question préliminaire :* soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite strictement croissante et convergente vers une limite ℓ. Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n<\ell.$$

On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\ \text{et}\ v_n=u_n+\frac{1}{n!}.$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers un même réel. On note ℓ leur limite commune.
2. Écrire un programme en `scilab` permettant de calculer u_{50} et v_{50} afin de conjecturer la valeur de ℓ.
   Ce programme renvoie 2.7182818 : que peut-on conjecturer quant à la valeur de ℓ ?
   Remarque : on admet pour l'instant ce résultat, il sera démontré plus tard dans l'année.
3. Dans cette question on va montrer que ℓ est un nombre irrationnel.
   (a) Justifier que :
   $$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n<\ell<v_n.$$
   (b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $n!u_n$ et $n!v_n$ sont deux entiers consécutifs.
   (c) Conclure.

Exercice 2 Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par

$$u_n=\sqrt{n+\sqrt{(n-1)+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}.$$

1. Vérifier que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_{n+1}=\sqrt{n+1+u_n}$.
2. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sqrt{n}\leqslant u_n\leqslant 2\sqrt{n}$.
3. En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sqrt{n}\leqslant u_n\leqslant\sqrt{n+2\sqrt{n-1}}$, puis que
$$\frac{u_n}{\sqrt{n}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1.$$
4. Montrer enfin que
$$u_n-\sqrt{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2}.$$
   Indication : on pourra utiliser la question 1. pour transformer $u_n-\sqrt{n}$.

Solution 1

0. Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < \ell$.

Pour cela raisonnons par l'absurde : on suppose donc l'existence d'un entier n_0 tel que $u_{n_0} \geqslant \ell$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant strictement croissante on a alors $u_{n_0+1} > u_{n_0} \geqslant \ell$ et pour tout $n \geqslant n_0 + 1$:

$$u_n > u_{n_0+1} > \ell$$

Par conservation des inégalités larges par passage à la limite, on a donc $\ell \geqslant u_{n_0+1}$, donc $\ell > \ell$ ce qui est absurde.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n < \ell.}$.

1. Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers une même limite ℓ. Pour cela montrons qu'elles sont adjacentes.
   - La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante, en effet pour tout $n > 0$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$.
   - La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante (à partir du rang 2). En effet pour $n \geqslant 2$:
   $$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{n!}\left(\frac{2}{n} - 1\right).$$
   Donc pour tout $n \geqslant 2$, $v_{n+1} - v_n < 0$.
   - Enfin : $v_n - u_n = \dfrac{1}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   Conclusion : $\boxed{\text{les suites } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ sont adjacentes donc convergent vers une même limite } \ell.}$

2.
```
function y=factorielle(n)
  p=1
  for k=1:n
    p=k*p
  end
y=p
endfunction
function y=u(n)
  s=0
  for k=0:n
    s=s+1/factorielle(k)
  end
y=s
endfunction
function y=v(n)
  y=u(n)+1/factorielle(n)
endfunction
```

   On exécute alors les instructions `u(50)` et `v(50)` dans la console pour obtenir le résultat.
   Ou sans fonction :

```
n=input('saisir n')
u=1  //initialisation à 1 à cause de factorielle 0
fact=1
for k=1:n
  fact=fact*k
        u=u+1/fact
end
v=u+1/fact
disp(u,v)
```

3. (a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite strictement croissante et convergente vers ℓ donc d'après la question préliminaire on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < \ell$.
   On montre de même que, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant une suite strictement croissante et convergente vers ℓ, elle vérifie : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ell < v_n$ (pour le démontrer on peut reprendre la démonstration de la question 0 ou, plus simplement, appliquer le résultat de la question 0 à la suite $(-v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$).

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   $$n!u_n = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}$$
   Or pour $k \in [\![0, n]\!]$, $\dfrac{n!}{k!} = \displaystyle\prod_{i=k+1}^{n} i$ est un entier, donc par somme d'entiers $n!u_n$ est un entier.
   D'autre part $n!v_n = n!u_n + 1$.
   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ n!u_n \text{ et } n!v_n \text{ sont deux entiers consécutifs.}}$

   (c) Supposons que $\ell \in \mathbb{Q}$, nous écrivons alors $\ell = \dfrac{p}{q}$ avec $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. D'après les questions précédentes, nous obtenons pour tout $n \geqslant 2$:
   $$u_n < \frac{p}{q} < v_n.$$

Écrivons cette égalité pour $n=q$ et multiplions par $q!>0$:

$$q!u_q < q!\frac{p}{q} < q!v_q$$

Or $q!\frac{p}{q}=p(q-1)!\in\mathbb{N}$ et $q!v_q=q!u_q+1$, l'encadrement précédent devient donc :

$$\underbrace{q!u_q}_{\in\mathbb{N}} < p(q-1)! < q!u_q+1,$$

ce qui est absurde (il n'y a aucun entier strictement compris entre $q!u_q$ et $q!u_q+1$).
Conclusion : nous avons bien montré que ℓ n'est pas un nombre rationnel.

Solution 2 1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a $u_{n+1}=\sqrt{(n+1)+\sqrt{n+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}=\sqrt{(n+1)+u_n}=\sqrt{n+1+u_n}$.

2. On a, par définition, $u_n\geqslant 1$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
   - On a donc en particulier $u_1\geqslant 1=\sqrt{1}$.
   - Soit $n\geqslant 2$. On a d'après ce qui précède $u_n=\sqrt{n+u_{n-1}}\geqslant\sqrt{n+1}\geqslant\sqrt{n}$.

   Conclusion : on a bien montré : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n\geqslant\sqrt{n}$.

   Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{A}(n)$: $u_n\leqslant 2\sqrt{n}$.
   - Comme $u_1=1\leqslant 2\sqrt{1}$, la proposition $\mathcal{A}(1)$ est vraie.
   - Soit un entier $n\geqslant 1$ tel que $\mathcal{A}(n)$ est vraie. D'après la question 1. et la proposition $\mathcal{A}(n)$, on a

   $$u_{n+1}=\sqrt{n+1+u_n}\leqslant\sqrt{n+1+2\sqrt{n}}=\sqrt{(\sqrt{n}+1)^2}=\sqrt{n}+1\leqslant\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1},$$

   ce qui prouve $\mathcal{A}(n+1)$.

   Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n\leqslant 2\sqrt{n}$.

3. - On a $u_1=1$ donc $\sqrt{1}\leqslant u_1\leqslant\sqrt{1+2\sqrt{0}}$.
   - Soit un entier $n\geqslant 2$. On a d'après la première question $u_n=\sqrt{n+u_{n-1}}$, et d'après la deuxième $u_{n-1}\leqslant 2\sqrt{n-1}$. Ainsi

   $$u_n\leqslant\sqrt{n+2\sqrt{n-1}}.$$

   Ainsi pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\sqrt{n}\leqslant u_n\leqslant\sqrt{n+2\sqrt{n-1}}$ (la partie gauche de l'inégalité ayant déjà été obtenue en question 2.).
   On en déduit l'encadrement suivant : $\forall n\in\mathbb{N}^*$,

   $$1\leqslant\frac{u_n}{\sqrt{n}}\leqslant\sqrt{1+\frac{2\sqrt{n-1}}{n}}.$$

   Or

   $$\frac{2\sqrt{n-1}}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0,$$

   donc

   $$\sqrt{1+\frac{2\sqrt{n-1}}{n}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1.$$

   Ainsi d'après le théorème d'encadrement, on a

   $$\frac{u_n}{\sqrt{n}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1.$$

4. D'après la question 1., on a pour tout $n\geqslant 2$,

   $$u_n-\sqrt{n}=\sqrt{n+u_{n-1}}-\sqrt{n}=\frac{u_{n-1}}{\sqrt{n+u_{n-1}}+\sqrt{n}}=\frac{u_{n-1}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{u_{n-1}}{n}}+1}.$$

   D'après la question précédente, on a $\frac{u_{n-1}}{\sqrt{n-1}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$. Or $\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$. Ainsi

   $$\frac{u_{n-1}}{\sqrt{n}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1.$$

   On en déduit que $\frac{u_{n-1}}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, ce qui nous donne $\sqrt{1+\frac{u_{n-1}}{n}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$, puis

   $$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{u_{n-1}}{n}}+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2}.$$

   On obtient alors le résultat souhaité.