Fonctions Réelles

Devoir Maison N°4

Questions :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x+1}-3x-1=0$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x^2-1| \leq x+1$

Exercice 1:

On considère les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique, notées ch et sh, et définies sur $\mathbb{R}$ par :
$\forall x \in \mathbb{R},\ ch\,(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $sh\,(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

1. Etude des fonctions ch et sh :
   (a) Etudier la parité des fonctions ch et sh.
   (b) Etudier les limites de ch et sh en $+\infty$ et $-\infty$.
   (c) Dresser le tableau de variations complet de la fonction sh. En déduire son signe.
   (d) Etudier les variations de la fonction ch.
   (e) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\quad ch\,(x) > sh\,(x)$.
   (f) Donner alors sur un même graphique l'allure des courbes représentatives des fonctions ch et sh.
2. Quelques formules
   (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ ch^2(x) - sh^2(x) = 1$.
   (b) Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ ch(a+b) = ch(a)ch(b) + sh(a)sh(b)$.
   En déduire une formule analogue pour $ch(a-b)$. Qu'en est-t-il pour $sh(a+b)$?
3. On veut montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $sh(x) = y$ d'inconnue x admet une unique solution que l'on déterminera.
   (a) Un cas particulier : résoudre l'équation $sh(x) = 1$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $y + \sqrt{1+y^2} > 0$ et $y - \sqrt{1+y^2} < 0$.
   (c) Résoudre alors l'équation $sh(x) = y$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, avec $y \in \mathbb{R}$ fixé.
4. Etude d'une fonction auxiliaire : on introduit la fonction f définie par la relation $f(x) = \dfrac{x}{sh(x)}$
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f, puis sa parité.
   (b) On pose : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\quad h\,(x) = sh(x) - x\,ch\,(x)$. Etudier les variations de h ; en déduire le signe de h.
   (c) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}^{+*}$. Puis le tableau sur $\mathbb{R}^*$ tout entier.

Exercice 2:

On définit la suite u par $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n - 3} + 3$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 4$.
2. Montrer que la suite u est décroissante. En déduire qu'elle converge.
3. Déterminer la limite de la suite u.
4. On introduit la suite v définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \ln(u_n - 3)$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n existe.

5. Reconnaître la suite v.
6. En déduire l'expression de u_n en fonction de n, puis retrouver la limite de la suite u.

Exercice 3:

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation, vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2}$.

1. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Dans cette question uniquement, on suppose $u_0 = 0$.
   (a) Montrer que, pour tout entier naturel n on a , $0 \leqslant u_n < 1$.
   (b) Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
   (c) Pour tout entier naturel n on pose, $v_n = 1 - u_n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n}\right) = \dfrac{1}{2}$.
3. Dans cette question, on suppose que $u_0 = 2$.
   (a) Montrer que la suite u n'est pas majorée.
   (b) En déduire la limite de la suite u.
4. Dans cette question, on suppose que $u_0 = 1$.
   Déterminer la valeur de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4:

On considère la fonction $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]0;+\infty[$, par : $f(x) = e^x - \mathrm{e}\ln(x)$

On admet les encadrements numériques suivants : $2,7 < \mathrm{e} < 2,8 \qquad 7,3 < \mathrm{e}^2 < 7,4 \qquad 0,6 < \ln(2) < 0,7$

Partie I : Etude de la fonction f

1. (a) Calculer, pour tout x de $]0;+\infty[$, $f'(x)$, puis $f''(x)$, où l'on a noté f'' la dérivée de f'.
   (b) En déduire le tableau de variations de f'.
   (c) Déterminer les limites de f' en 0 et en $+\infty$ puis préciser $f'(1)$.
2. En déduire le tableau de variations complet de f et préciser la valeur du minimum $f(1)$.
3. Tracer la courbe représentative de f.
4. (a) Etudier les variations de la fonction $u :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$
   $x \mapsto f'(x) - x$.
   (b) En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0;+\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et montrer : $1 < \alpha < 2$.

Partie II : Etude d'une suite

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

5. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.
6. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
7. (a) Démontrer : $\forall x \in [2;+\infty[, \quad 2\ln(x) \leqslant x \leqslant \frac{\mathrm{e}^x}{3}$
   (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geqslant \frac{6-\mathrm{e}}{2} u_n$.
   (c) Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 2(\frac{6-\mathrm{e}}{2})^n$ puis déterminer la limite de la suite u.
   (d) Déterminer un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \geq 1000$.

Eléments de correction du DS 1

Questions

1. Erreur récurrente : confusion entre l'ensemble de définition (càd l'ensemble des x où tous les termes de l'équation existent) et l'ensemble des x où l'équation peut avoir des solutions.
   Corrigé : Equation définie sur $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}/x+1 \geq 0\} = [-1, +\infty[$. Puis deux rédactions possibles :
   Analyse : supposons qu'une telle solution $x \in [-1, +\infty[$ existe. Alors $\sqrt{x+1} = 3x+1 \Rightarrow x+1 = (3x+1)^2$
   $\Rightarrow 9x^2+5x = 0 \Rightarrow x(9x+5) = 0 \Rightarrow x = 0 \in [-1, +\infty[$ ou $x = -\frac{5}{9} \in [-1, +\infty[$. Donc deux candidats à cette équation.
   Synthèse : on vérifie si les candidats sont solutions. $\sqrt{0+1} = 1 = 3\times 0+1$ mais $\sqrt{-\frac{5}{9}+1} = \frac{2}{3} \neq 3\times(-\frac{5}{9})+1 = -\frac{2}{3}$.
   Conclusion : cette équation admet une unique solution $x = 0$.
   <u>Rédaction par équivalences</u> : (brouillon $3x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1/3$)
   Sur $[-1, -1/3[$, $\sqrt{x+1} \geq 0$ et $3x+1 < 0$. L'équation n'admet aucune solution.
   Sur $[-1/3, +\infty[$, comme les deux membres sont positifs, on a l'équivalence $\sqrt{x+1} = 3x+1 \Leftrightarrow x+1 = (3x+1)^2$
   $\Leftrightarrow 9x^2+5x = 0 \Leftrightarrow x(9x+5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in [-\frac{1}{3}, +\infty[$ ou $x = -\frac{5}{9} \notin [-1/3, +\infty[$. Ccl : $\mathcal{S} = \{0\}$.
2. L'inéquation est définie sur $\mathbb{R}$. Mais si $x \in]-\infty, -1[$, $x+1 < 0$ et x ne peut pas être solution.
   Sur $[-1, +\infty[$, $x+1 \geq 0$ d'où $|x^2-1| \leq x+1 \Leftrightarrow -(x+1) \leq x^2-1 \leq x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-2 \leq 0 \\ 0 \leq x^2+x \end{cases}$ Or sur $[-1, +\infty[$,
   $x^2+x = x(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \{-1\} \cup [0, +\infty[$ et pour x^2-x-2 : $\Delta = 9$ deux racines -1 et 2. *Ccl* : $\mathcal{S} = [0, 2] \cup \{-1\}$.

Exercice 1: `inspiré d'ecricome E 2003`

1. (a) ch et sh sont définies sur $\mathbb{R}$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $ch(-x) = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = ch(x)$
   et $sh(-x) = \frac{e^{-x}-e^{x}}{2} = -\frac{(e^{x}-e^{-x})}{x} = -sh(x)$. La fonction ch est paire, et la fonction sh est impaire.
   (b) En $+\infty$: $e^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'où $sh(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Par imparité : en $-\infty$ $sh(x) \to -\infty$ (ou refaire les limites : $e^x \to 0$ et $e^{-x} \to +\infty$ d'où $sh(x) \to -\infty$). Quant à ch, $ch(x) \to +\infty$ quand $x \to \pm\infty$.
   (c) sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $sh'(x) = \frac{e^x-(-e^{-x})}{2} = ch(x) > 0$. Donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (faire un tableau !) Comme $sh(0) = 0$, sh négative sur $\mathbb{R}^-$ et positive sur $\mathbb{R}^+$.
   (d) ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $ch'(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = sh(x)$. Signe connu. Faire le TV.
   (e) $ch(x) - sh(x) = \frac{e^x+e^{-x}-(e^x-e^{-x})}{2} = e^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. (a) $ch^2(x) - sh^2(x) = \frac{1}{4}[(e^x+e^{-x})^2 - (e^x-e^{-x})^2] = \frac{1}{4}[e^{2x}+2+e^{-2x} - (e^{2x}-2+e^{-2x})] = \frac{1}{4}[4] = 1$.
   (b) $ch(a)ch(b) + sh(a)sh(b) = \frac{1}{4}[(e^a+e^{-a})(e^b+e^{-b}] + \frac{1}{4}[(e^a-e^{-a})(e^b-e^{-b}] = \frac{1}{4}[e^{a+b}+e^{a-b}+e^{-a+b}+e^{-a-b}+e^{a+b}-e^{-a+b}-e^{a-b}+e^{-a-b}] = \frac{1}{4}[2e^{a+b}+2e^{-(a+b)}] = \frac{1}{2}(e^{a+b}+e^{-(a+b)}) = ch(a+b)$.
   En appliquant la formule précédente à $-b$ au lieu de b, on obtient $ch(a-b) = ch(a+(-b)) = ch(a)ch(-b) + sh(a)sh(-b) = ch(a)ch(b) - sh(a)sh(b)$ par parité de ch et imparité de sh.
   Remarquer que les formules sont analogues aux formules sur le cos et le sin ! On peut donc deviner que $sh(a+b) = ch(a)sh(b) + sh(a)ch(b)$ (au signe près !) et vérifier ensuite par le calcul cette formule.
3. (a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $sh(x) = 1 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 2 \Leftrightarrow \frac{e^{2x}-2e^x-1}{e^x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x}-2e^x-1 = 0$. Posons $X = e^x > 0$. L'équation devient X^2-2X-1 à étudier sur $\mathbb{R}_+^*$. Or $\Delta = 4+4 = 8$ d'où deux solutions a priori $X_1 = \frac{2-\sqrt{8}}{2} < 0$ (car $\sqrt{8} > \sqrt{4} = 2$) et $X_2 = \frac{2+\sqrt{8}}{2} = 1+\sqrt{2} > 0$ (car $\sqrt{8} = \sqrt{4*2} = \sqrt{4}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$). Finalement, pour $X > 0$, $X = e^x \Leftrightarrow x = \ln(X)$ d'où une seule solution $x = \ln(1+\sqrt{2})$.
   (b) Première inégalité : évidente si $y \geq 0$. Puis si $y < 0$, on utilise par exemple la quantité conjuguée : $y+\sqrt{1+y^2} = \frac{(y+\sqrt{1+y^2})(y-\sqrt{1+y^2})}{y-\sqrt{1+y^2}} = \frac{y^2-(1+y^2)}{y-\sqrt{1+y^2}} = \frac{-1}{y-\sqrt{y^2+1}} > 0$ car $y < 0$ et $\sqrt{y^2+1} > 0$ donc $y - \sqrt{y^2+1} < 0$.
   Pour l'autre inégalité : évident pour $y \leq 0$, puis pour $y > 0$, utiliser la quantité conjuguée... Ou par construction : $0 < 1$ donc $y^2 < 1+y^2$ donc par st. croissance de la racine, $\sqrt{y^2} < \sqrt{y^2+1}$ càd $|y| < \sqrt{y^2+1}$ soit encore $-\sqrt{y^2+1} < y < \sqrt{y^2+1}$ ce qui donne les deux inégalités directement !
   (c) On généralise la méthode du a). Soit $y \in \mathbb{R}$. Alors $sh(x) = y \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 2y \Leftrightarrow \frac{e^{2x}-2ye^x-1}{e^x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x}-2ye^x-1 = 0$. Posons $X = e^x > 0$. L'équation devient $X^2-2yX-1 = 0$ à étudier sur $\mathbb{R}_+^*$. Or $\Delta = 4y^2+4 = 4(y^2+1) > 0$.
   Deux solutions a priori $X_1 = \frac{2y-\sqrt{4(y^2+1)}}{2} = y-\sqrt{y^2+1} \leq 0$ par b) et $X_2 = \frac{2y+\sqrt{4(y^2+1)}}{2} = y+\sqrt{y^2+1} > 0$.
   On obtient une unique solution $x = \ln(y+\sqrt{y^2+1})$.
4. (a) $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}|sh(x) \neq 0\} = \mathbb{R}^*$ car par 3c) $sh(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln(0+\sqrt{0^2+1}) = \ln 1 = 0$.
   Puis $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $-x \in \mathbb{R}^*$ et $f(-x) = \frac{-x}{sh(-x)} = \frac{-x}{-sh(x)} = f(x)$. Donc f est paire.
   (b) h est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $h'(x) = ch(x) - ch(x) - xsh(x) = -xsh(x) \leq 0$ car $x \geq 0$ donc $sh(x) \geq 0$. Donc h est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et comme $h(0) = 0$, h est négative sur $\mathbb{R}^+$.
   (c) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \frac{sh(x)-x\,ch(x)}{(sh(x))^2} = \frac{h(x)}{(sh(x))^2}$.
   Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et par parité, f est croissante sur $\mathbb{R}_-^*$.

Exercice 2:

1. Par récurrence : montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$," u_n existe et $u_n > 4$". Pour $n = 0$: d'après l'énoncé $u_0 = 5 > 4$.
   Hérédité : Supposons que pour un certain n "u_n existe et $u_n > 3$". Montrons que u_{n+1} existe et $u_{n+1} > 3$

Or $u_n > 4 \Rightarrow u_n - 3 > 1 \Rightarrow u_n - 3 \geq 0$ donc $\sqrt{u_n - 3}$ est bien défini et $\sqrt{u_n - 3} + 3 = u_{n+1}$ existe.
D'autre part, $u_n - 3 > 1 \Rightarrow \sqrt{u_n - 3} > \sqrt{1} = 1$ par st. croissance de $\sqrt{\ }$ donc $u_{n+1} > 1 + 3 = 4$. Conclusion.

2. Par récurrence, montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, "$u_n \geq u_{n+1}$".
initialisation : $u_0 = 5$, $u_1 = \sqrt{2} + 3$ d'où $u_0 - u_1 = 2 - \sqrt{2} \geq 0$ car $2 \leq 4 \Rightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{4} = 2$.
hérédité : supposons que pour un certain n $u_n \geq u_{n+1}$. Montrons que $u_{n+1} \geq u_{n+2}$. Or $u_n \geq u_{n+1} \Rightarrow u_n - 3 \geq u_{n+1} - 3 \Rightarrow \sqrt{u_n - 3} \geq \sqrt{u_{n+1} - 3}$ (par croissance de $\sqrt{\ }$) $\Rightarrow \sqrt{u_n - 3} + 3 \geq \sqrt{u_{n+1} - 3} + 3 \Rightarrow u_{n+1} \geq u_{n+2}$.
conclusion : la suite est décroissante. Comme elle est minorée par 3 (cf 1.) elle converge.

3. Notons l sa limite. Alors comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 4$ on sait que (passage à la limite dans les inégalités larges), $l \geq 4$. Puis (opérations sur les limites) $\sqrt{u_n - 3} + 3 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \sqrt{l - 3} + 3$ et par ailleurs, $u_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$.
Donc par passage à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = \sqrt{u_n - 3} + 3$ on obtient l'équation $l = \sqrt{l - 3} + 3$.
On résout cette équation : $l - 3 = \sqrt{l - 3} \Leftrightarrow (l - 3)^2 = l - 3$ (car $l - 3 \geq 0$) $\Leftrightarrow l^2 - 7l + 12 = 0$. $\Delta = 49 - 48 = 1$ d'où deux solutions $\frac{7-1}{2} = 3$ et $\frac{7+1}{2} = 4$. Comme $l \geq 4$, on obtient $l = 4$.

4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 4$ donc $u_n - 3 > 1 > 0$ et $\ln(u_n - 3) = v_n$ existe.

5. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 3) = \ln(\sqrt{u_n - 3}) = \frac{1}{2}\ln(u_n - 3) = \frac{1}{2}v_n$. Donc la suite v est une suite géométrique de raison $1/2$ et de premier terme $v_0 = \ln(u_0 - 3) = \ln(2)$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = (\frac{1}{2})^n \ln(2)$.

6. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_n - 3)$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^{v_n} + 3 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^0 + 3 = 4$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow (\frac{1}{2})^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Exercice 3: `inspiré d'edhec E 2012`

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + 1}{2} - u_n = \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2} = \frac{(u_n - 1)^2}{2} \geq 0$ et la suite u est croissante.

2. (a) Par récurrence : *hérédité* soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq u_n < 1$ alors par st. croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^+$ $0 \leq u_n^2 < 1$ d'où $1 \leq u_n^2 + 1 < 2$ et $\frac{1}{2} \leq \frac{u_n^2 + 1}{2} < 1$. Donc $0 \leq \frac{1}{2} \leq u_{n+1} < 1$.
   (b) La suite est croissante et majorée par 1 : elle converge donc vers une limite finie ℓ. Par passage à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$(car $u_n \to \ell$ et $u_{n+1} \to \ell$), on obtient $\ell = \frac{\ell^2 + 1}{2}$. D'où ... $\ell = 1$.

3. FI $\infty - \infty$. $\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} = \frac{1}{1 - u_{n+1}} - \frac{1}{1 - u_n} = \frac{1}{1 - \frac{u_n^2 + 1}{2}} - \frac{1}{1 - u_n} = \frac{2}{1 - u_n^2} - \frac{1}{1 - u_n} = \frac{2 - (1 + u_n)}{1 - u_n^2} = \frac{1 - u_n}{1 - u_n^2} = \frac{1}{1 + u_n} \to \frac{1}{2}$

4. (a) Raisonnons par l'absurde. Supposons que la suite u est majorée. Alors comme elle est croissante, elle converge et par 2.c), elle converge vers $\ell = 1$. Mais $u_0 = 2$, et par croissance, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2$ d'où $\ell \geq 2$. Contradiction.
   (b) u est croissante et non majorée ; donc $u_n \to +\infty$.

5. Remarquer que $u_0 = 1 \Rightarrow u_1 = 1$. Donc montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$.

Exercice 4: `inspiré d'eml E 2017`

1. (a) f est dérivable sur $]0, +\infty[$, et pour tout $x > 0$:$f'(x) = e^x - \frac{\mathrm{e}}{x}$ et $f''(x) = e^x + \frac{\mathrm{e}}{x^2}$.
   (b) pour tout $x > 0$, on a $f''(x) > 0$ donc f' est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
   (c) pas de FI : On a : $f'(x) = e^x - \frac{\mathrm{e}}{x} \underset{0^+}{\to} -\infty$ et $f'(x) = e^x - \frac{\mathrm{e}}{x} \underset{+\infty}{\to} +\infty$ et $f'(1) = e^1 - e/1 = 0$.
   (d) Donc f' est négative sur $]0, 1]$ et positive sur $[1, +\infty[$.

2. Donc f admet un minimum en 1 et $f(1) = \mathrm{e}$. Pas de FI en 0 : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ et d'après les croissances comparées en $+\infty$, $f(x) = e^x - \mathrm{e}\ln(x) = e^x(1 - \mathrm{e}\frac{\ln x}{e^x}) \underset{0^+}{\to} +\infty$.

3. En $+\infty$, $\ln(x)$ est "négligeable" devant e^x donc $f(x)$ se comporte comme e^x (allure exponentielle en $+\infty$).

4. (a) u est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $u'(x) = (f'(x) - x)' = f''(x) - 1$.
   Et comme pour tout $x > 0$: $f''(x) = e^x + \frac{\mathrm{e}}{x^2} > e^x > 1$, on a $u'(x) = f''(x) - 1 > 0$ sur $]0; +\infty[$.
   (b) $f'(x) = x \Leftrightarrow u(x) = 0$. Or u est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$, $\lim\limits_{x \to 0^+} u(x) = -\infty$ et $u(x) = e^x - \frac{\mathrm{e}}{x} - x = -\frac{\mathrm{e}}{x} + e^x(1 - \frac{x}{e^x}) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ d'après les croissances comparées. Donc u s'annule une et une seule fois dans $]0; +\infty[$. De plus : $u(1) = -1 < 0$ et $u(2) = e^2 - \frac{\mathrm{e}}{2} - 2 > 7,3 - 1,4 - 2 > 0$, donc $1 < \alpha < 2$

5. Par récurrence : $u_0 = 2$. Puis si u_n existe et $u_n \geqslant 2 > 0$ alors ($[2, +\infty[\subset \mathcal{D}_f$), $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini et $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant \mathrm{e} \geqslant 2$ d'après le TV. Conclure

6. Par récurrence : $u_1 = e^2 - \mathrm{e}\ln(2) \geq e^2 - \mathrm{e} > 2 = u_0$ (vu les encadrements). Puis, si pour un certain n, $u_{n+1} \geq u_n$, alors comme f est croissante sur $[2, +\infty[$, (et d'après 5.) $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$ soit $u_{n+2} \geq u_{n+1}$. Conclure.

7. (a) Faire deux études de fonctions en posant $h(x) = 2\ln(x) - x$ puis $k(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{3} - x$ (TV complet !)
   (b) $u_{n+1} = f(u_n) = e^{u_n} - \mathrm{e}\ln(u_n)$. D'après ce qui précède : $e^{u_n} \geqslant 3u_n$ et $\ln(u_n) \leqslant \frac{u_n}{2}$ donc $-\mathrm{e} * \ln(u_n) \geqslant -\mathrm{e}\frac{u_n}{2}$. On obtient alors, en ajoutant les 2 inégalités : $u_{n+1} = e^{u_n} - \mathrm{e}\ln(u_n) \geqslant 3u_n - \mathrm{e}\frac{u_n}{2} = \frac{6 - \mathrm{e}}{2}u_n$.
   (c) Faire une récurrence (idée de suite "quasi" géométrique). Puis comme $\frac{6 - \mathrm{e}}{2} > 1$, $(\frac{6 - \mathrm{e}}{2})^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc par comparaison, la suite u diverge vers $+\infty$.
   (d) Pour être sûr de $u_n \geq 1000$, il suffit d'avoir $2(\frac{6 - \mathrm{e}}{2})^n \geq 1000$. On résout cette inéquation en passant au ln st. croissant : $n\ln((6 - e)/2) > \ln(500) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(500)}{\ln((6 - e)/2))}$ (dénom >0), donc $n_0 = \lfloor \frac{\ln(500)}{\ln((6 - e)/2))} \rfloor + 1$ convient.