Fonctions Réelles

Devoir Maison N°4 bis

Exercice 1:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons pour tout $x \in [0, +\infty[$, $g_n(x) = \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}$.

1. Cas $n = 0$
   (a) Calculer g_0', puis dresser le tableau de variations complet de g_0 sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Déterminer l'équation de la tangente en 0 puis dessiner l'allure de la courbe g_0 (tangente en 0 incluse).
2. Cas $n = 1$
   (a) Calculer g_1' puis dresser le tableau de variations de g_1 sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que le maximum de g_1 vaut $M_1 = \frac{1}{2e}$.
   (b) Déterminer la limite de $g_1(x)$ quand $x \to +\infty$. (On pourra poser $X = ...$).
3. Cas général $n \in \mathbb{N}^*$:
   (a) calculer g_n' puis dresser le tableau de variations de g_n.
   Pour trouver le signe de g_n', commencer par simplifier puis mettre en facteur du $(\ln(1+x))^{\cdots}$
   (b) Montrer que le maximum de g_n vaut $M_n = \left(\frac{n}{2e}\right)^n$.

Exercice 2:

1. Montrer que, pour tout réel x strictement positif : $\ln x \leqslant x + 1$.

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}$.

2. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f. (*Attention puissance réelle ! commencer par réécrire f*)
3. Calculer pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f'(x)$ puis déterminer son signe. *Pour trouver le signe de f', commencer par chercher une forme "compacte" de f', càd une forme factorisée, mise au même dénominateur etc.*
4. Dresser le tableau de variations complet de f.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur $\mathcal{D}$, puis vérifier que $\alpha > 1$.
6. Résoudre l'équation $f(x) = x$ pour $x \in \mathcal{D}$. (*résolution ... donc raisonnement par équivalence nécessaire !*)

Corrigé

Exercice 1: Ecricome E 2016

1. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, $g_0(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ (par déf, pour tout réel y, $y^0 = 1$). g_0 est bien dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et puisque $x \geq 0$, $g_0'(x) = -\frac{2}{(1+x)^3} < 0$. Donc g_0 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$: $g(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ (pas de F.I.). La tangente en 0 : $y = -2x+1$ puisque $g'(0) = -2$ et $g(0) = 1$. S'aider de la tangente pour l'allure.
2. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, $g_1(x) = \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}$, $g_1'(x) = \frac{\frac{1}{1+x}(1+x)^2 - \ln(1+x)\times 2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{(1+x)[1-2\ln(1+x)]}{(1+x)^4} = \frac{1-2\ln(1+x)}{(1+x)^3}$.
Or $1-2\ln(1+x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1+x \leq e^{1/2}$ [car exp est st. croissante] $\Leftrightarrow x \leq e^{1/2}-1$.
Donc g_1 est croissante sur $[0, e^{1/2}-1]$, et décroissante sur $[e^{1/2}-1, +\infty[$. En $+\infty$, en posant $X = x+1$, on a $X \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $g_1(x) = \frac{\ln(X)}{X} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (croissances comparées). Max : $g_1(e^{1/2}-1) = \frac{\ln(e^{1/2})}{(e^{1/2})^2} = \frac{1/2}{e} = \frac{1}{2e}$.
3. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, $g_n'(x) = \frac{n\frac{1}{1+x}(\ln(1+x))^{n-1}(1+x)^2 - (\ln(1+x))^n \times 2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{n\ln(1+x)^{n-1} - 2\ln(1+x)^n}{(1+x)^3} = \frac{\ln(1+x)^{n-1}[n-2\ln(1+x)]}{(1+x)^3}$.
Comme $x \geq 0$, $\ln(1+x) \geq 0$ donc $\ln(1+x)^{n-1} \geq 0$ et de plus, $(1+x)^3 \geq 0$. Donc $g_n'(x)$ est du signe du crochet.
Or $n-2\ln(1+x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) \leq \frac{n}{2} \Leftrightarrow x \leq e^{n/2}-1$. Puis $M_n = g(e^{n/2}-1) = \frac{(\ln(e^{n/2}))^n}{(e^{n/2})^2} = \frac{(n/2)^n}{e^n} = \left(\frac{n}{2e}\right)^n$.

Exercice 2: Esc E 97

1. Poser la fonction $g(x) = x+1-\ln x$ (ou $\ln x - (x+1)$) pour $x > 0$. Alors $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ donc g admet un minimum en $x = 1$ de valeur $g(1) = 2 \geq 0$ donc g est positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. $x^{1+\frac{1}{x}} = e^{(1+1/x)\ln x}$ d'où $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \text{ et } x > 0\} = \mathbb{R}_+^*$.
3. pour $x > 0$, $f'(x) = (-\frac{1}{x^2}\ln(x) + (1+\frac{1}{x})\frac{1}{x})e^{(1+\frac{1}{x})\ln(x)} = \frac{-\ln x + x + 1}{x^2}e^{(1+\frac{1}{x})\ln(x)}$ donc par 1. $f'(x) \geq 0$.
4. En 0^+ : $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\frac{1}{x})\ln x = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} 1+\frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$. D'où, par composée, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$.
En $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x} = 1$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})\ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
5. f est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Comme $2 \in f(]0,+\infty[=]0,+\infty[$, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution $\alpha \in]0,+\infty[$. Puis $f(1) = 1 < 2 = f(\alpha)$ d'où (par stricte croissance de f) $1 < \alpha$.
6. Pour $x \in \mathcal{D}$, $f(x) = x \Leftrightarrow x^{1+1/x} = x \Leftrightarrow x \times x^{1/x} = x \Leftrightarrow x^{1/x} = 1$ CAR $x \neq 0$, $\Leftrightarrow e^{1/x\ln(x)} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x}\ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0$ CAR $1/x \neq 0$, $\Leftrightarrow x = 1$. OU directement avec la forme exponentielle ($x = e^{\ln(x)}$) : $f(x) = x \Leftrightarrow e^{(1+\frac{1}{x})\ln(x)} = e^{\ln(x)} \Leftrightarrow (1+\frac{1}{x})\ln(x) = \ln(x) \Leftrightarrow (1+\frac{1}{x}-1)\ln(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}\ln(x) = 0 \Leftrightarrow ...$