Ensembles & Applications
Devoir Maison

Exercice 1 (**) On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$

1. Étudier la parité de f.
2. Préciser les variations de f. Que peut-on en déduire sur l'injectivité de f ?
3. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle I que l'on précisera.
4. Expliciter f^{-1}.
5. Écrire un programme Scilab qui prend en argument un réel positif a et renvoie le graphe de f sur $[-a, a]$.
6. Modifier le programme pour afficher le graphe de f^{-1}.

Exercice 2 (***)

Soient E, F deux ensembles et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$, $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$, deux applications. Vérifier que :

1. Si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.
2. Si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

Exercice 3 (*** facultatif).

Soient E deux parties non-vides d'un ensemble E. On définit l'application $f :\ \mathrm{M} \in \mathcal{P}(\mathrm{E}) \mapsto (\mathrm{A} \cup \mathrm{M}, \mathrm{B} \cup \mathrm{M}) \in \mathcal{P}(\mathrm{A}) \times \mathcal{P}(\mathrm{B})$.

1. Montrer que f est surjective si et seulement si $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$.
2. Montrer que f est injective si et seulement si $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \varnothing$.

Exercice 4

Cosinus hyperbolique

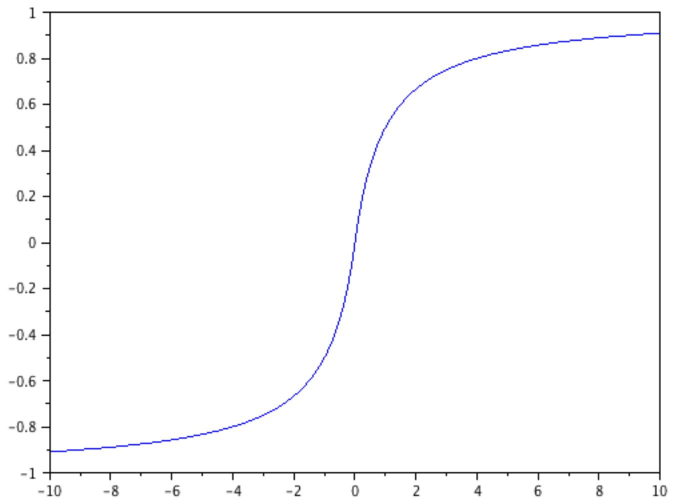
1. Montrer que : $\forall\ a, b \in \mathbb{R}^+,\ \sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$.
2. En déduire que pour tout réel x,
$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} \geqslant 1$$
3. On peut alors définir l'application
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & [1, +\infty[\\ x & \mapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{array} \right.$$
Justifier que f est injective.
4. Soit $y \geqslant 1$. On pose $x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$.
   (a) Vérifier que x est bien défini avec $x \geqslant 0$.
   (b) Calculer $f(x)$.
   (c) En déduire la surjectivité de f.
5. Préciser f^{-1}.

Solution 3.

1. f est paire. On peut limiter l'étude sur $\mathbb{R}^+$.
2. On a pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,
$$f(x) = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}.$$
Par composition, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, puis strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
On peut conclure que f est injective par stricte monotonie.
3. Précisons les limites en $\pm\infty$.
$$f(x) \underset{x\geqslant 0}{=} 1 - \frac{1}{1+x} \to_{+\infty} 1^- \quad \text{et} \quad f(x) \to_{-\infty} -1 \quad \text{par imparité.}$$
Par le théorème de la bijection (f est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement monotone), f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle $]-1,1[$.
4. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}\times]-1,1[$, on a les équivalences en distinguant pour x positif et x négatif. Pour $x \geqslant 0$,
$$f(x) = y \iff \frac{x}{1+x} = y \iff 1 - \frac{1}{1+x} = y \iff \frac{1}{1+x} = 1-y \iff 1+x = \frac{1}{1-y} \iff x = \frac{y}{1-y}.$$
Pour, x négatif, on a
$$f(x) = y \iff \frac{x}{1-x} = y \iff \frac{1}{1-x} - 1 = y \iff \frac{1}{1-x} = 1+y \iff 1-x = \frac{1}{1+y} \iff x = \frac{y}{1+y}.$$
On résume
$$f^{-1} :\ y \in]-1,1[\mapsto \frac{y}{1-|y|} \in \mathbb{R}.$$

5.
```
function graphe(a)
x=linspace(-abs(a),abs(a),200)
y=x./(1+abs(x))
plot(x,y)
endfunction
```

Par exemple, on trouve `-->graphe(10)`



6. Comme le graphe de f^{-1} s'obtient par symétrie par rapport à l'axe d'équation $y = x$. Il suffit d'échanger le rôle de x et y.

7.
```
function graphereciproque(a)
x=linspace(-abs(a),abs(a),200)
y=x./(1+abs(x))
plot(y,x)
endfunction
```

1. Soient $y, y' \in \mathrm{F}$, tels que $g(y) = g(y')$, montrons que $y = y'$.
Comme f est surjective, il existe $x, x' \in \mathrm{E}$ tels que

$$f(x) = y \quad \text{et} \quad f(x') = y'.$$

Par suite,

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = g(y') = g(f(x')) = g \circ f(x').$$

Par injectivité de $g \circ f$, on a $x = x'$. Puis,

$$y = f(x) = f(x') = y'.$$

On a prouvé l'injectivité de g.

2. Soit $y \in \mathrm{F}$, montrons qu'il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $f(x) = y$.
On pose $z = g(y) \in \mathrm{G}$. Par surjectivité de $g \circ f$, on a l'existence de $x \in \mathrm{E}$ tel que

$$g \circ f(x) = z.$$

Il vient,

$$g(f(x)) = z \quad \text{et} \quad g(y) = z.$$

Par injectivité de g, il vient $f(x) = y$.
Ceci étant valable pour tout $y \in \mathrm{F}$, on a prouvé la surjectivité de f.

Attention coquille dans l'énoncé. On définit l'application

$$f : \mathrm{M} \in \mathcal{P}(\mathrm{E}) \mapsto (\mathrm{A} \cap \mathrm{M}, \mathrm{B} \cap \mathrm{M}) \in \mathcal{P}(\mathrm{A}) \times \mathcal{P}(\mathrm{B}).$$

1. Raisonnons par double implication.
• Supposons f surjective et montrons que $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$.
Considérons $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}, \varnothing) \in \mathcal{P}(\mathrm{A}) \times \mathcal{P}(\mathrm{B})$. Par surjectivité de f, il existe $\mathrm{M} \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$ tel que

$$f(\mathrm{M}) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}, \varnothing) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{A} \cap \mathrm{M} = \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} \cap \mathrm{M} = \varnothing.$$

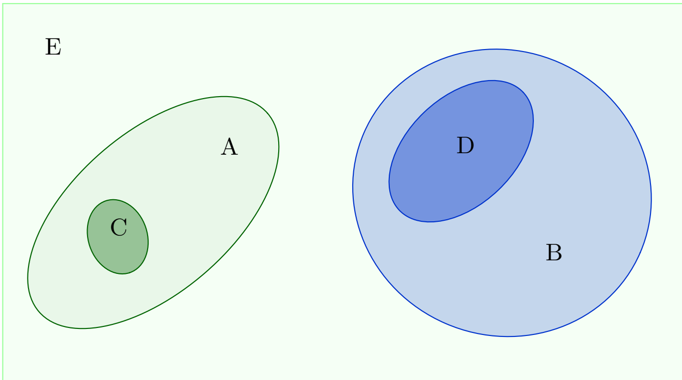
On en déduit,

$$A \cap B = (A \cap B) \cap B = (A \cap M) \cap B = A \cap (B \cap M) = A \cap \varnothing = \varnothing.$$

• Réciproquement, supposons $A \cap B = \varnothing$ et montrons que f est surjective.
Soient $(C, D) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, montrons qu'il existe $M \in \mathcal{P}(E)$ tel que

$$f(M) = (C, D) \iff M \cap A = C \quad \text{et} \quad M \cap B = D.$$

Graphiquement,



Le graphe suggère de poser $M = C \cup D \in \mathcal{P}(E)$ de sorte que

$$f(M) = f(C \cup D) = ((C \cup D) \cap A, (C \cup D) \cap B)) = (C, D).$$

2. Raisonnons, de nouveau, par double implication.
• Supposons f injective, montrons que $A \cup B = E$. Pour cela, remarquons que

$$f(A \cup B) = (A \cap (A \cup B), B \cap (A \cup B)) = (A, B) \quad \text{et} \quad f(E) = (A \cap E, B \cap E) = (A, B).$$

Par injectivité de f,

$$f(E) = f(A \cup B) \quad \Rightarrow \quad E = A \cup B.$$

• Supposons que $A \cup B = E$, montrons que f est injective.
Soient $M, M' \in \mathcal{P}(E)$ tels que $f(M) = f(M')$, montrons que $M = M'$. Or,

$$f(M) = f(M') \quad \Rightarrow \quad A \cap M = A \cap M' \quad \text{et} \quad B \cap M = B \cap M'.$$

D'où,

$$M = M \cap (A \cup B) = (A \cap M) \cup (B \cap M) = (A \cap M') \cup (B \cup M') = (A \cup B) \cap M' = E \cap M' = M'.$$

D'où, l'injectivité de f.

Remarque. On peut conclure de cette étude que f est bijective si et seulement si f est à la fois injective et surjective. D'après les questions précédentes, c'est équivalent à

$$A \cap B = \varnothing \quad \text{et} \quad A \cup B = E.$$

Autrement dit, $B = \overline{A}$.