

Espaces Vectoriels II

Devoir Maison Spécial Confinement

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On définit l'application $\Phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad \Phi(M) = AM.$$

1. Montrer que Φ est une application linéaire.
2. Dans cette question on suppose que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
 - (a) Déterminer une base de $\text{Ker}(\Phi)$ et une base de $\text{Im}(\Phi)$.
 - (b) L'application Φ est-elle injective? surjective?
3. Dans cette question on suppose que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
 - (a) Montrer que Φ^2 s'exprime en fonction de Φ et id (l'application identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$).
 - (b) En déduire que Φ est bijectif et calculer Φ^{-1} .

