

CORRIGE

1) $\forall M, N \in M_2(\mathbb{R}), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
on a

$$\begin{aligned}\phi(\alpha M + \beta N) &= A(\alpha M + \beta N) \\ &= \alpha AM + \beta AN \\ &= \alpha \phi(M) + \beta \phi(N)\end{aligned}$$

2) a) $M \in \text{Ker } \phi \Leftrightarrow \phi(M) = 0$

$$\Leftrightarrow \phi(M) = 0$$

$$\Leftrightarrow AM = 0$$

posons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{pmatrix}$$

$$AM = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+2c=0 \\ 2a+4c=0 \\ b+2d=0 \\ 2b+4d=0 \end{cases} \begin{matrix} (1) \\ (2) = 2 \times (1) \\ (3) \\ (4) = 2 \times (3) \end{matrix}$$

(1)

$$\text{Ainsi } M \in \text{Ker } \phi \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2c = 0 \\ b + 2d = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow c = -2a \text{ et } b = -2d$$

$$\Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow M = c \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ainsi } \underline{B_1} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

famille génératrice de $\text{Ker } \phi$
formée par deux elts non prop
donc base de $\text{Ker } \phi$

$$a) M \in \text{Im } \phi \Leftrightarrow \exists M \in M_2(\mathbb{R}) \text{ tq } N = \phi(M)$$

$$\Leftrightarrow \exists M \in M_2(\mathbb{R}) \text{ tq } N = AM$$

$$\text{posons } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$N = AM \Leftrightarrow N = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow N = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + 2c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 2d \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi la famille génératrice de $\text{Im } \phi$

$$\text{serait } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$1^{\text{er}} = 3^{\text{er}}$ et $2^{\text{e}} = 4^{\text{e}}$ on les enlève

la famille génératrice sera

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

(3)

soit B_2 formé par deux elt non prop
donc base

b) on a trouvé $\ker \phi \neq 0$ donc

ϕ Non injective

on a trouvé la base de $\text{Im } \phi$

contient 2 elt alors que

la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$ contient

4 elt donc $\text{Im } \phi = M_2(\mathbb{R})$

car ϕ Non surj