Simulation DS N°2

Nombres Complexes

Jeudi 24 Octobre 2019
Durée : 1h30

Exercice 1. - Calculons vite et bien !

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $|z| + \overline{z} = 6 - 2i$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C} - \{2\}$ l'équation $\left(\frac{z-3i}{z+2}\right)^2 + 6\left(\frac{z-3i}{z+2}\right) + 13 = 0$.

Exercice 2. Soit un réel $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx} = 2^n \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n e^{i\frac{nx}{2}}.$$
2. En déduire, pour tout entier n, les valeurs respectives des sommes suivantes :
$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) \quad \text{et} \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx).$$
3. Montrer finalement que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \cos(kx) = n\cos(x)C_{n-1}(x) - n\sin(x)S_{n-1}(x),$$
puis que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \cos(kx) = n2^{n-1}\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{n-1} \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right).$$

Exercice 3 On considère le nombre complexe $z = -\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

(1) Donner la forme algébrique de z^2.

(2) En déduire la forme trigonométrique de z^2.

(3) Déterminer alors la forme trigonométrique de z. On justifiera soigneusement cette détermination.

(4) En déduire le sinus et le cosinus de $\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 4. Dans cet exercice, on étudie et démontre des méthodes pour résoudre des équations complexes.

Préliminaires

On rappelle que tout polynôme à coefficients complexes de degré $n \in \mathbb{N}^*$ possède au plus n racines complexes distinctes, c'est-à-dire que si P est un polynôme de degré n alors l'équation $P(z) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ a au plus n solutions.

1. On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Déterminer les solutions de l'équation $z^3 = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ en fonction de j.

Partie I : Résolution d'équations complexes de degré 2

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. Dans cette partie, on considère l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(E) \ : \ az^2 + bz + c = 0.$$

2. Résoudre (E) dans le cas où $a = 0$.
   Dans la suite de cette partie, on ne considère que le cas où $a \neq 0$.
3. Combien de solution(s) possède (E) ?
4. Montrer que $(E) \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0$.
   On pose alors $\Delta = b^2 - 4ac$.
5. Résoudre alors (E) dans le cas où $\Delta = 0$.
6. **Dans toute cette question, on considère que $\Delta \neq 0$.**
   (a) Justifier que Δ admet deux racines carrées non nulles. **On les note δ_1 et δ_2.** Quelle est la relation entre ces deux racines ?
   (b) Exprimer les racines carrées de $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ en fonction de δ_1 et de δ_2.
   (c) En déduire les solutions de (E) en fonction δ_1 et δ_2, puis seulement en fonction de δ_1.
   (d) Calculer la somme et le produit des deux solutions obtenues. Quelle propriété peut-on en déduire ?
7. Faire un bilan des deux questions précédentes en donnant une méthode pour résoudre les équations de degré 2 complexes dans le cas où $a \neq 0$.
8. **Application :** Résoudre les équations complexes suivantes
   - $z^2 + (3i - 4)z + 1 - 7i = 0$
   - $z^2 + (\sqrt{2} + i\sqrt{2})z + i = 0$.

Proposition de solutions

Solution 1 1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Il existe donc a et b deux réels tels que $z = a + ib$. Alors,

$$
\begin{aligned}
|z| + \overline{z} = 6 - 2i &\Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} + a - ib = 6 - 2i \\
&\Leftrightarrow \left(\sqrt{a^2+b^2} + a - 6\right) + i(2-b) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2+b^2} + a - 6 = & 0 \\ 2 - b = & 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2+4} = 6 - a \\ 2 = b \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 6 - a \geq 0 \text{ et } a^2 + 4 = (6-a)^2 \\ b = 2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 6 \text{ et } 12a = 32 \\ b = 2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a &= \frac{8}{3} \\ b &= 2 \end{cases}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Conclusion : $\boxed{\text{Cette équation admet une unique solution : } \mathcal{S} = \{\tfrac{8}{3} + 2i\}.}$

2. Soit $z \in \mathbb{C} - \{2\}$. On pose $Z = \frac{z-3i}{z+2}$. On a alors :

$$\left(\frac{z-3i}{z+2}\right)^2 + 6\left(\frac{z-3i}{z+2}\right) + 13 = 0 \Leftrightarrow Z^2 + 6Z + 13 = 0.$$

Résolvons alors cette équation d'inconnue Z. Le discriminant vaut $\Delta = 36 - 4 \times 13 = -16 < 0$ (et donc $\Delta = (4i)^2$). Il y a donc deux solution complexes :

$$Z_1 = \frac{-6-4i}{2} = -3 - 2i \text{ et } Z_2 = \frac{-6+4i}{2} = -3 + 2i.$$

On résout alors :

$$
\begin{aligned}
&\frac{z-3i}{z+2} = -3 - 2i \\
&\Leftrightarrow z - 3i = (-3-2i)z + 2(-3-2i) \\
&\Leftrightarrow z(4+2i) = -6 - i \\
&\Leftrightarrow z = \frac{-6-i}{4+2i} \\
&\Leftrightarrow z = \frac{(-6-i)(4-2i)}{16+4} \\
&\Leftrightarrow z = \frac{-13+4i}{10}.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Puis, de la même manière, on trouve :

$$\frac{z-3i}{z+2} = -3 + 2i \Leftrightarrow z = \frac{-19+8i}{10}.$$

Les deux complexes trouvés étant différents de 2, ce sont les solutions recherchées.

Conclusion : $\boxed{\text{L'équation étudiée admet deux solutions : } \mathcal{S} = \{\tfrac{-13+4i}{10}, \tfrac{-19+8i}{10}\}.}$

Exercice 3 : On considère le nombre complexe $z = \sqrt{2+\sqrt{3}} + \mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

(1) Donner la forme algébrique de z^2.

On a
$$z^2 = \left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 = (2+\sqrt{3}) - (2-\sqrt{3}) + 2\mathrm{i} = 2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}$$

(2) En déduire la forme trigonométrique de z^2.
$$z^2 = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 4e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$$

(3) Déterminer alors la forme trigonométrique de z. On justifiera soigneusement cette détermination.

On peut remarquer que : $4e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = (2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}})^2$ donc
$$z^2 = (2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}})^2 \text{ ou encore } z^2 - (2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}})^2 = 0$$
puis par factorisation, on a
$$(z - 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}})(z + 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}) = 0$$
impliquant alors
$$z = 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} \text{ ou } z = -2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}.$$
Puisque la partie réelle de z est strictement positive, la bonne égalité est
$$z = 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$$
ce qui est la forme trigonométrique de z.

(4) En déduire le sinus et le cosinus de $\frac{\pi}{12}$.

Puisque $z = 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$, on obtient par identification des parties réelles et imaginaires :
$$\Re\mathrm{e}(z) = \sqrt{2+\sqrt{3}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \text{ et } \Im\mathrm{m}(z) = \sqrt{2-\sqrt{3}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$
donnant ensuite
$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

1. Résoudre l'équation $z^3 = 1$ revient à chercher les racines cubiques de l'unité. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$z^3 = 1 \Leftrightarrow |z|^3 e^{i3\arg(z)} = e^{i0} \Leftrightarrow |z| = 1 \text{ et } 3\arg(z) = 0(2\pi) \Leftrightarrow |z| = 1 \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z},\ arg(z) = \frac{2k\pi}{3}$$

où l'on a utilisé l'unicité de la forme trigonométrique. D'après le rappel de l'énoncé, on sait que cette équation admet au maximum trois solutions. Comme on obtient trois solutions différentes pour $k = 0$, $k = 1$ et $k = 2$, ce sont les solutions de l'équation.

Conclusion : $\boxed{\text{Les racines cubiques de l'unité sont } 1,\ e^{\frac{2i\pi}{3}} = j \text{ et } e^{\frac{4i\pi}{3}} = j^2.}$

Partie I

1. Si $a = 0$ alors l'équation devient $bz + c = 0$. Ainsi, si $b \neq 0$, on a $z = \frac{-c}{b}$ pour unique solution. Si $b = 0$ et $c = 0$ alors tous les réels sont solutions. Enfin, si $b = 0$ et $c \neq 0$, alors l'équation n'admet aucune solution.

   Conclusion : $\boxed{\text{Lorsque } a = 0, \text{ l'équation admet une unique solution si } b \neq 0.}$

   $\boxed{\text{Elle n'admet aucune solution si } b = 0 \text{ et } c \neq 0 \text{ et une infinité de solutions si } b = 0 \text{ et } c = 0.}$

2. Lorsque $a \neq 0$, résoudre (E) revient à chercher les racines d'un polynôme complexe de degré 2. Il y a donc au plus deux solutions distinctes d'après le rappel de l'énoncé.

3. Soit $z \in \mathbb{R}$. On a :

$$az^2 + bz + c = 0 \ \Leftrightarrow\ a(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}) = 0 \ \Leftrightarrow z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0$$

   car $a \neq 0$. Puis, en utilisant la forme canonique, on obtient :

$$(E) \ \Leftrightarrow\ \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \ \Leftrightarrow\ \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

   Conclusion : $\boxed{\text{Si } a \neq 0, \text{ alors } (E) \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}.}$

4. Si $\Delta = 0$ alors résoudre (E) revient à résoudre $\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{b}{2a}.$$

   Conclusion : $\boxed{\text{Lorsque } \Delta = 0, \text{ l'équation } (E) \text{ admet une solution double } z_0 = -\frac{b}{2a}.}$

5. (a) D'après le cours, un nombre complexe admet toujours deux racines carrées qui sont opposées l'une de l'autre. Par ailleurs si $\delta_1 = 0$ alors $\delta_1^2 = \Delta = 0$. C'est absurde puisqu'on a supposé le contraire dans cette question.

   Conclusion : $\boxed{\Delta \text{ admet deux racines carrées non nulles qui sont opposées l'une de l'autre : } \delta_1 = -\delta_2.}$

   (b) Si on pose $s_1 = \frac{\delta_1}{2a}$ et $s_2 = \frac{\delta_2}{2a}$ alors on a $s_2^2 = s_1^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$. Donc s_1 et s_2 sont des racines carrées de $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$. Comme elles sont distinctes, et au nombre de deux, ce sont les racines carrées de $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

   Conclusion : $\boxed{\text{Les racines carrées de } \frac{b^2-4ac}{4a^2} \text{ donc } \frac{\delta_1}{2a} \text{ et } \frac{\delta_2}{2a}.}$

   (c) Soit $z \in \mathbb{C}$. Grâce aux questions 3 puis 5.b. nous avons :

$$(E) \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} = \frac{\delta_1}{2a} \text{ ou } z + \frac{b}{2a} = \frac{\delta_2}{2a} \Leftrightarrow z = \frac{-b - \delta_1}{2a} \text{ ou } z = \frac{-b - \delta_2}{2a}.$$

   Enfin, comme $\delta_1 = -\delta_2$, on peut conclure.

   Conclusion : $\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sont les complexes } z_1 = \frac{-b-\delta_1}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b+\delta_1}{2a}.}$

   (d) On a :

$$z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} \text{ et } z_1.z_2 = \frac{c}{a}.$$

   On retrouve la propriété connue dans le cas réel.

   Conclusion : $\boxed{\text{Les nombres } z_1 \text{ et } z_2 \text{ sont les solutions de l'équation } x^2 - (z_1 + z_2)x + z_1 z_2.}$

6. Pour résoudre l'équation lorsque $a \neq 0$, il faut d'abord calculer $\Delta = b^2 - 4ac$. Il y a alors deux cas.

   (a) Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une unique solution (double) $z_0 = \frac{-b}{2a}$.

   (b) Si $\Delta \neq 0$, alors l'équation admet deux solutions. On calcule δ une racine carrée de Δ et les solutions de (E) sont alors $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$.

7. • Résolvons $z^2 + (3i - 4)z + 1 - 7i = 0$.

$$\Delta = (3i - 4)^2 - 4(1 - 7i) = 3 + 4i = (2 + i)^2 \neq 0$$

   où l'on a obtenu une racine carrée de Δ en appliquant la méthode du cours pour la recherche de racines carrées sous forme algébrique. Les solutions de cette équations sont donc $z_1 = \frac{-(3i-4)-(2+i)}{2} = 1 - 2i$ et $z_2 = \frac{-(3i-4)+(2+i)}{2} = 3 - i$.

• Résolvons $z^2 + (\sqrt{2} + i\sqrt{2})z + i = 0$.

$$\Delta = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})^2 - 4i = 0.$$

Ainsi, l'équation admet une unique racine double qui est $z_0 = \frac{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}$

Fin