Fonctions Réelles
Suites Numériques

Durée : 4 heures

Documents et Calculatrices Interdits

Problème A

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}-1$

I. Etude de f

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. Préciser l'expression de $f(1)$ sans fraction, ainsi que l'équation de la tangente en 0.
4. Déterminer les limites de $x\mapsto\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}$ en $+\infty$ et $-\infty$. Deviner alors les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
   Interpréter graphiquement.
5. Résoudre l'équation $f(x)=x$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$. *(penser à raisonner par équivalence car "résolution" !)*
6. Résoudre l'inéquation $f(x)\leq x$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$.
7. Tracer la courbe représentative de f (ce qui inclut les asymptotes et les tangentes en 0 et 1) ainsi que la droite d'équation $y=x$. On pourra utiliser que $1.4<\sqrt{2}<1.5$.

II. Etude d'une suite récurrente.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0\in\mathbb{R}$ et pour tout entier n, $u_{n+1}=f(u_n)$

1. Que dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $u_0=-1$? si $u_0=0$?
2. On suppose ici $u_0<-1$.
   (a) Montrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n<-1$.
   penser à garder la lettre f pour pouvoir utiliser la partie I
   (b) Montrer alors que u est croissante.
   (c) En déduire que la suite u converge et déterminer sa limite.
3. On suppose ici $-1<u_0<0$.
   Montrer alors que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $-1<u_n<0$ puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Conclure quant à la convergence de la suite u, et préciser sa limite.

Problème B

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$.

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Donner l'ensemble de définition de f.

   (b) Dresser son tableau de variations complet.

   (c) On note Δ la droite d'équation $y = x$. Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de Δ. Préciser les points d'intersection.

   (d) Construire dans un même repère orthonormé $\mathcal{C}$ et Δ.
   On pourra au préalable préciser l'équation de la tangente en 0 à $\mathcal{C}$.

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

   (a) Soit p un entier naturel non nul. Montrer que : $f(\frac{1}{p}) \leqslant \frac{1}{p+1}$.

   (b) En déduire par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$

   (c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

   (d) Vérifier que : $\frac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \frac{1}{u_n}$

   (e) En déduire, par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{u_n} \leq n + 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

   (f) Montrer que pour tout $k \geq 2$, $\frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$.

   (g) En déduire que pour $n \geq 2$, $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n)$

   (h) Montrer alors que pour $n \geq 2$, $\frac{1}{u_n} \leq n + 2 + \ln(n)$.

   (i) A l'aide des résultats, précédents, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$.

Problème C

Le but de cet exercice est d'étudier la famille des fonctions f_k définies par $f_k(x) = \frac{(\ln(x))^k}{x-1}$.

1. Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ des fonctions f_k.
2. Cas $k = 1$: $f_1 : x \mapsto \frac{\ln x}{x-1}$.
   (a) Donner le signe de f_1 sur $\mathcal{D}$.
   (b) Déterminer les limites de f_1 en 0 et en $+\infty$. Interpréter graphiquement.
   La fonction f_1 se prolonge-t-elle par continuité en 1 ?
   (c) Justifier que f_1 est dérivable sur $\mathcal{D}$ et calculer $f_1'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}$.
   (d) On introduit $\varphi : x \mapsto x - 1 - x\ln x$. Dresser le tableau de variations complet de φ sur $]0, +\infty[$.
   (e) En déduire le tableau de variations complet de f_1 sur $\mathcal{D}$.
   (f) Représenter graphiquement l'allure de f_1 sur $\mathcal{D}$.
3. Cas $k \geq 2$: $f_k : x \mapsto \frac{(\ln(x))^k}{x-1}$
   (a) Déterminer les limites de f_k en 0 et en $+\infty$. *On distinguera deux cas selon k.*
   (b) Calculer $f_k'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}$.
   (c) On pose pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\varphi_k(x) = k(x-1) - x\ln x$.
   Dresser le tableau de variations complet de φ_k. On pourra préciser la valeur de $\varphi_k(1)$.
   (d) Montrer que l'équation $\varphi_k(x) = 0$ admet une unique solution sur $]1, +\infty[$. On la notera a_k.
   (e) En distinguant deux cas selon k, dresser le tableau de variations complet de f_k sur $\mathcal{D}$.
   (f) Montrer alors que pour tout $k \geq 2$, $e^{k-1} \leq a_k \leq e^k$. Qu'en déduit-on sur la limite de a_k ?

Problème D

Partie I : Etude d'un programme Scilab

(Cette partie I à rédiger séparément dans une autre double feuille

On étudie le programme Scilab suivant.

```
a=input('Entrer un réel strictement positif')
b=input('Entrer un réel strictement supérieur à a')
N=input('Entrer un entier naturel')
u=a
v=b
n=0
while n<N
    n=n+1
    u=(a+b)/2
    v=sqrt((a^2 + b^2))/2
    a=u
    b=v
end
disp(v,'et la valeur de v est',u,'La valeur de u est')
```

1. Comprendre le programme et calculer à la main les valeurs exactes de ce qu'il retournera si l'on choisit $a = 4$ et $b = 9$ pour $N = 0$, $N = 1$ et $N = 2$.
2. Comment sont définies les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étudiées par ce programme ?

Partie II : Etude théorique de deux suites mêlées

On souhaite étudier la nature des deux suites introduites à la question précédente.
où a et b deux réels strictement positifs

$$u_0 = a < v_0 = b \qquad u_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad v_{n+1} = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2}$$

1. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ et $v_n > 0$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2$.
   (c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$.
2. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (b) Comparer v_{n+1}^2 et v_n^2 pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire le sens de variations de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.

Problème E (Bonus)

- Calculs de limites pour une famille de fonctions

On considère, pour a un réel non nul, la fonction f_a définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f_a(x) = x^{1-x^a} = \exp\left((1-x^a)\ln(x)\right)$$

et on note $\mathcal{C}_a$ la courbe représentative de f_a dans un repère orthonormal.

Partie I : Préliminaires

1) Rappeler le domaine de définition ainsi que l'expression de la fonction $x \mapsto x^a$ en fonction de exp et ln.
2) On suppose $a > 0$. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a$.
3) On suppose que $a < 0$. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a$.

Partie II : Etude dans le cas $a > 0$

1) Montrer que f_a se prolonge par continuité en 0.
2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x)$ et interpréter graphiquement cette limite.

Partie III : Etude dans le cas $a < 0$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f_a(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.
2) On définit la fonction g_a sur $]0,+\infty[$ par $g_a(x) = \frac{f_a(x)-x}{x^{a+1}\ln(x)}$. On se propose de montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g_a(x) = -1$.
   a) On définit la fonction u_a sur $]0,+\infty[$ par $u_a(x) = -x^a\ln(x)$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} u_a(x)$.
   b) Exprimer $g_a(x)$ en fonction de $u_a(x)$ et conclure.
3) Déduire de la question précédente $\lim\limits_{x\to+\infty} (f_a(x) - x)$ dans le cas où $a < -1$ et interpréter le résultat graphiquement.

Fin