Préparation Concours Blanc

Fonctions Réelles
Suites Numériques

Questions :

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{|x^2-1|} = x-5$ (E).
2. Donner l'ensemble de définition de $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{\ln(x+1)}$ et de $g(x) = (e^x-3)^x$.
3. On considère l'application f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = (x+\ln x)\,e^{x-1}$.
   (a) Montrer que : $\forall x \in]0,+\infty[, \quad \ln x + \frac{1}{x} > 0$.
   (b) Calculer f' puis dresser le tableau de variations complet de f.
   (c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée α. Vérifier alors que $\alpha < 1$.
4. Calculer les sommes suivantes (on ne simplifiera pas les résultats obtenus) :
   $S_1 = \sum\limits_{k=13}^{40} 3k(1-k)$ et $S_2 = \sum\limits_{k=2}^{20} (-1)^k \times 3^{2k}$ et $S_3 = \sum\limits_{k=5}^{n} \frac{2^{k-1}}{5^{k+1}}$

Exercice 1:

Soit la suite u définie par $u_0 > \sqrt{3}$ et $\forall n \geq 0,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + \dfrac{3}{u_n})$.

1. (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, u_n existe et $u_n > \sqrt{3}$.
   (b) Montrer alors que la suite est décroissante.
   (c) Montrer que la suite converge vers $\sqrt{3}$.
   (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} - \sqrt{3} \leq \frac{(u_n-\sqrt{3})^2}{2\sqrt{3}}$.
2. Dans cette question uniquement, on suppose que $u_0 = 2$.
   (a) Justifier que l'étude précédente s'applique bien à ce cas.
   (b) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n - \sqrt{3} \leq \dfrac{1}{(2\sqrt{3})^{2^n-1}}$.
   (c) Déterminer un entier n pour lequel u_n fournit une valeur approchée de $\sqrt{3}$ à 10^{-3} près.
3. On introduit la suite v définie par $v_n = \dfrac{u_n-\sqrt{3}}{u_n+\sqrt{3}}$ pour tout $n \geq 0$ et la suite w par $w_n = \ln(v_n)$.
   (a) Montrer que les suites v et w sont bien définies.
   (b) Montrer que $v_0 < 1$ puis que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = (v_n)^2$.
   (c) Reconnaître alors la suite w. En déduire w_n puis v_n, en fonction de n et v_0.
   Quelle est la limite de v_n ?
   (d) Retrouver d'une autre façon le résultat de la question 1.(c).

Exercice 2:

On considère les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique, notées ch et sh, et définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ ch\,(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad sh\,(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. Etude des fonctions ch et sh :
   (a) Etudier la parité des fonctions ch et sh. Interpréter graphiquement.
   (b) Etudier les limites de ch et sh en $+\infty$ et $-\infty$.

(c) Dresser le tableau de variations complet de la fonction sh. En déduire son signe.

(d) Etudier les variations de la fonction ch.

(e) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\quad ch\,(x) > sh\,(x)$.

(f) Donner alors sur un même graphique l'allure des courbes représentatives des fonctions ch et sh.

2. Quelques formules

(a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$.

(b) Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $ch(a+b) = ch(a)ch(b) + sh(a)sh(b)$.
En déduire une formule analogue pour $ch(a-b)$.

3. On veut montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $sh(x) = y$ d'inconnue x admet une unique solution que l'on déterminera.

(a) Un cas particulier : résoudre l'équation $sh(x) = 1$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $y + \sqrt{1+y^2} > 0$ et $y - \sqrt{1+y^2} < 0$.

(c) Résoudre alors l'équation $sh(x) = y$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, avec $y \in \mathbb{R}$ fixé.

4. Etude d'une fonction auxiliaire : on introduit la fonction f définie par la relation $f(x) = \dfrac{x}{sh(x)}$

(a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f, sa parité, puis sa limite en $+\infty$.

(b) On pose : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\quad h\,(x) = sh(x) - x\,ch\,(x)$. Etudier les variations de h ; en déduire le signe de h.

(c) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}^{+*}$. Puis le tableau sur $\mathbb{R}^*$ tout entier, limites incluses.

5. Quelques sommes

(a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*, \sum\limits_{k=0}^{n} e^{kx} = \dfrac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^x}$ puis que $\sum\limits_{k=0}^{n} e^{kx} = e^{\frac{n}{2}x}\left(\dfrac{sh(\frac{(n+1)x}{2})}{sh(\frac{x}{2})}\right)$.

(b) Donner alors une formule analogue pour $\sum\limits_{k=0}^{n} e^{-kx}$, avec $x \in \mathbb{R}^*$.

(c) En déduire une formule pour $\sum\limits_{k=0}^{n} ch(kx)$, avec $x \in \mathbb{R}^*$, ne faisant intervenir que du ch et du sh.

Exercice 3:

Soit r un réel positif. On s'intéresse aux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation de récurrence : $u_{n+2} = u_{n+1} + r^n u_n$.

1. Que dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand $r = 0$?

2. Dans cette question uniquement, on suppose $r = 1$.

(a) On suppose de plus $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

i. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

ii. Déterminer alors la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

(b) On revient au cas plus général, $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_1 \in \mathbb{R}$.

i. Exprimer alors u_n en fonction de n, u_0 et u_1.

ii. Existe-t-il des valeurs de u_0 et u_1 telles que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ?

3. Dans cette question uniquement, on suppose $r > 1$ et $u_0 > 0$ et $u_1 > 0$.

(a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $u_n \geq (n-1)u_1$.

(b) Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

4. Dans cette question uniquement, on suppose $0 < r < 1$ et $0 < u_0 \leq u_1$. On considère de plus la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $v_1 = u_1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = (1 + r^{n-1})v_n$.

(a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $v_n = u_1 \prod\limits_{k=1}^{n-1}(1 + r^{k-1})$.
En déduire que la suite v est positive puis croissante.

(b) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$.

(c) Justifier que pour tout $n \geq 2$, $\sum\limits_{k=1}^{n-1} r^{k-1} \leq \frac{1}{1-r}$.

(d) Déduire des questions précédentes que pour tout $n \geq 2$, $\ln(v_n) \leq \ln(u_1) + \frac{1}{1-r}$.

(e) Proposer alors un majorant de la suite v.

(f) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ puis déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(g) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq u_n \leq v_n$

(h) En déduire la nature de la suite u.

Corrigé

Exercice 1: `inspiré d'esclsca E 94`

1. (a) Mq pour tout $n\in\mathbb{N}$, "u_n existe et $u_n>\sqrt{3}$" : *n=0* : par hypothèse, $u_0>\sqrt{3}$.
Supposons que pour un certain n, u_n existe et $u_n>\sqrt{3}$. Alors $u_n\neq 0$ et u_{n+1} existe : $u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+\dfrac{3}{u_n})$ d'où $u_{n+1}-\sqrt{3}=\frac{1}{2}(\frac{u_n^2+3-2\sqrt{3}u_n}{u_n})=\frac{1}{2}\frac{(u_n-\sqrt{3})^2}{u_n}>0$ (par H.R.). Ccl.
   (b) $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}(u_n+\frac{3}{u_n})-u_n=\frac{3-u_n^2}{2u_n}\leq 0$ car $2u_n>0$ et $u_n>\sqrt{3}\Rightarrow u_n^2\geq 3$.
   (c) La suite u est décroissante et minorée par $\sqrt{3}$ donc elle converge. Soit l sa limite. Comme $\forall n\geq 0$, $u_n>\sqrt{3}$, on a $l\geq\sqrt{3}$. Puis par passage à la limite dans la relation de récurrence (comme $l\neq 0$) on a $l=\frac{1}{2}(l+\frac{3}{l})$. Résolution : $l=\frac{1}{2}(l+\frac{3}{l})\Leftrightarrow l=\frac{3}{l}\Leftrightarrow l^2=3\Leftrightarrow l=\sqrt{3}$ (car $l>0$).
   (d) L'inégalité de gauche vient de 1.(a) (vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$, donc en particulier en $n+1$.) Puis d'après le calcul fait en 1, $u_{n+1}-\sqrt{3}=\frac{(u_n-\sqrt{3})^2}{2u_n}\leq\frac{(u_n-\sqrt{3})^2}{2\sqrt{3}}$ puisque $u_n>\sqrt{3}\Rightarrow\frac{1}{u_n}\leq\frac{1}{\sqrt{3}}$. (ou faire la différence ...)
2. (a) $3<4$ donc par stricte croissance de la racine, $\sqrt{3}<2$. Donc $u_0=2$ vérifie bien $u_0>\sqrt{3}$.
   (b) L'inégalité de gauche est immédiate d'après 1.(a). Montrons l'inégalité de droite par récurrence :
$n=0$. $u_0-\sqrt{3}=2-\sqrt{3}\leq 2-1=1$ car $\sqrt{3}\geq\sqrt{1}=1$ et par ailleurs $\frac{1}{(2\sqrt{3})^{2^0-1}}=1$ puisque $2^0-1=0$.
Supposons maintenant $u_n-\sqrt{3}\leq\frac{1}{(2\sqrt{3})^{2^n-1}}$; par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$, on a $(u_n-\sqrt{3})^2\leq(\frac{1}{(2\sqrt{3})^{2^n-1}})^2=\frac{1}{(2\sqrt{3})^{(2^n-1)\times 2}}=\frac{1}{(2\sqrt{3})^{2^{n+1}-2}}$. D'où par enchaînement (cf question 1.(d)) $u_{n+1}-\sqrt{3}\leq\frac{1}{2\sqrt{3}}(u_n-\sqrt{3})^2\leq\frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{1}{(2\sqrt{3})^{2^{n+1}-2}}=\frac{1}{(2\sqrt{3})^{2^{n+1}-1}}$. Conclure.
   (c) D'après la question précédente, il suffit de choisir n tel que $\frac{1}{(2\sqrt{3})^{2^n-1}}\leq 10^{-3}$ (cf DM3).
On résout : $10^3\leq(2\sqrt{3})^{2^n-1}\Leftrightarrow 3\ln(10)\leq(2^n-1)\ln(2\sqrt{3})$[stricte croissance du ln] $\Leftrightarrow\frac{3\ln(10)}{\ln(2\sqrt{3})}+1\leq 2^n\Leftrightarrow c\leq 2^n$ [en posant $c=\frac{3\ln(10)}{\ln(2\sqrt{3})}+1$] $\Leftrightarrow\ln(c)\leq n\ln(2)\Leftrightarrow\frac{\ln(c)}{\ln(2)}\leq n$. Donc l'entier $n_0=\lfloor\frac{\ln(c)}{\ln(2)}\rfloor+1$ convient.
3. (a) par 1., on sait que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n>\sqrt{3}$ donc $u_n+\sqrt{3}\neq 0$ et v_n existe. Puis toujours par 1., $u_n-\sqrt{3}>0\Rightarrow v_n>0$ et donc w_n existe pour tout $n\geq 0$.
   (b) $1-v_0=\frac{2\sqrt{3}}{u_0+\sqrt{3}}>0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}-\sqrt{3}}{u_{n+1}+\sqrt{3}}=\dfrac{\frac{1}{2}(u_n+\frac{3}{u_n})-\sqrt{3}}{\frac{1}{2}(u_n+\frac{3}{u_n})+\sqrt{3}}=\dfrac{\frac{u_n^2+3-2\sqrt{3}u_n}{2u_n}}{\frac{u_n^2+3+2\sqrt{3}u_n}{2u_n}}=\dfrac{(u_n-\sqrt{3})^2}{(u_n+\sqrt{3})^2}=v_n^2$.
   (c) par (b), $\forall n\in\mathbb{N}$, $w_{n+1}=\ln(v_{n+1})=\ln(v_n^2)=2\ln(v_n)=2w_n$. Donc la suite w est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $w_0=\ln(v_0)$. D'où $\forall n\in\mathbb{N}$, $w_n=(2^n)\ln(v_0)$ et $v_n=e^{w_n}=e^{2^n\ln(v_0)}$.
Comme $v_0<1$, $\ln(v_0)<0$ et donc $2^n(\ln v_0)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}-\infty$. On en déduit que $v_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$
   (d) $v_n=\frac{u_n-\sqrt{3}}{u_n+\sqrt{3}}\Leftrightarrow(u_n+\sqrt{3})v_n=u_n-\sqrt{3}$ (car $u_n+\sqrt{3}\neq 0$) $\Leftrightarrow u_n(1-v_n)=\sqrt{3}(1+v_n)\Leftrightarrow u_n=\sqrt{3}\frac{1+v_n}{1-v_n}$ **car** $v_n=e^{2^n\ln(2)}<e^0=1$ donc $1-v_n\neq 0$. Comme $\underset{n\to+\infty}{lim}v_n=0$, on en déduit : $\underset{n\to+\infty}{lim}u_n=\sqrt{3}$ (pas de F.I.).

Exercice 2: `inspiré d'Ecricome E 2003 :`

1. (a) ch et sh sont définies sur $\mathbb{R}$, et $\forall x\in\mathbb{R}$, $-x\in\mathbb{R}$. Puis $ch(-x)=\frac{e^{-x}+e^x}{2}=ch(x)$
et $sh(-x)=\frac{e^{-x}-e^x}{2}=-\frac{(e^x-e^{-x})}{x}=-sh(x)$. La fonction ch est paire, et la fonction sh est impaire.
Interprétation graphique : symétrie par rapport à Ox pour ch, et par rapport à l'origine pour sh.
   (b) En $+\infty$: $e^x\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ et $e^{-x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ d'où $sh(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$. Par imparité : en $-\infty$ $sh(x)\to-\infty$ (ou refaire les limites : $e^x\to 0$ et $e^{-x}\to+\infty$ d'où $sh(x)\to-\infty$). Quant à ch, $ch(x)\to+\infty$ quand $x\to\pm\infty$.
   (c) sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $sh'(x)=\frac{e^x-(-e^{-x})}{2}=ch(x)>0$. Donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (faire un tableau !) Comme $sh(0)=0$, sh négative sur $\mathbb{R}^-$ et positive sur $\mathbb{R}^+$.
   (d) ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $ch'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=sh(x)$. Donc ch est strictement décroissante puis strictement croissante. (tableau !)
   (e) $ch(x)-sh(x)=\frac{e^x+e^{-x}-(e^x-e^{-x})}{2}=e^{-x}>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
2. (a) $ch^2(x)-sh^2(x)=\frac{1}{4}[(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2]=\frac{1}{4}[e^{2x}+2+e^{-2x}-(e^{2x}-2+e^{-2x})]=\frac{1}{4}[4]=1$.
   (b) $ch(a)ch(b)+sh(a)sh(b)=\frac{1}{4}[(e^a+e^{-a})(e^b+e^{-b}]+\frac{1}{4}[(e^a-e^{-a})(e^b-e^{-b}]=\frac{1}{4}[e^{a+b}+e^{a-b}+e^{-a+b}+e^{-a-b}+e^{a+b}-e^{-a+b}-e^{a-b}+e^{-a-b}]=\frac{1}{4}[2e^{a+b}+2e^{-(a+b)}]=\frac{1}{2}(e^{a+b}+e^{-(a+b)})=ch(a+b)$.
En appliquant la formule précédente à $-b$ au lieu de b, on obtient $ch(a-b)=ch(a+(-b))=ch(a)ch(-b)+sh(a)sh(-b)=ch(a)ch(b)-sh(a)sh(b)$ par parité de ch et imparité de sh.

3. (a) $\forall x \in \mathbb{R},\ sh(x) = 1 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 2 \Leftrightarrow \frac{e^{2x}-2e^x-1}{e^x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$. Posons $X = e^x > 0$. L'équation devient $X^2 - 2X - 1 = 0$ à étudier sur $\mathbb{R}_+^*$. Or $\Delta = 4+4 = 8$ d'où deux solutions a priori $X_1 = \frac{2-\sqrt{8}}{2} < 0$ (car $\sqrt{8} > \sqrt{4} = 2$) et $X_2 = \frac{2+\sqrt{8}}{2} = 1+\sqrt{2} > 0$ (car $\sqrt{8} = \sqrt{4*2} = \sqrt{4}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$). Finalement, pour $X > 0$, $X = e^x \Leftrightarrow x = \ln(X)$ d'où une seule solution $x = \ln(1+\sqrt{2})$.

   (b) Première inégalité : évidente si $y \geq 0$. Puis si $y < 0$, on utilise par exemple quantité conjuguée : $y + \sqrt{1+y^2} = \frac{(y+\sqrt{1+y^2})(y-\sqrt{1+y^2})}{y-\sqrt{1+y^2}} = \frac{y^2-(1+y^2)}{y-\sqrt{1+y^2}} = \frac{-1}{y-\sqrt{y^2+1}} > 0$ car $y < 0$ et $\sqrt{y^2+1} > 0$ donc $y - \sqrt{y^2+1} < 0$.
   Pour l'autre inégalité, faire de même. Ou plus rapide : construction. $1 > 0$ d'où $1+y^2 > y^2$ et par croiss. de $\sqrt{\ }$, $\sqrt{1+y^2} > |y|$ ce qui donne $-\sqrt{1+y^2} < y < \sqrt{1+y^2}$. Soit les deux inégalités demandées.

   (c) On généralise la méthode utilisée au a). Soit $y \in \mathbb{R}$. Alors $sh(x) = y \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 2y \Leftrightarrow \frac{e^{2x}-2ye^x-1}{e^x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$. Posons $X = e^x > 0$. L'équation devient $X^2 - 2yX - 1 = 0$ à étudier sur $\mathbb{R}_+^*$. Or $\Delta = 4y^2 + 4 = 4(y^2+1) > 0$. Deux solutions a priori $X_1 = \frac{2y-\sqrt{4(y^2+1)}}{2} = y - \sqrt{y^2+1} \leq 0$ par b) et $X_2 = \frac{2y+\sqrt{4(y^2+1)}}{2} = y + \sqrt{y^2+1} > 0$. On obtient une unique solution $x = \ln(y+\sqrt{y^2+1})$.

4. (a) $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} | sh(x) \neq 0\} = \mathbb{R}^*$ car par 3c) $sh(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln(0+\sqrt{0^2+1}) = \ln 1 = 0$.
   Puis $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $-x \in \mathbb{R}^*$ et $f(-x) = \frac{-x}{sh(-x)} = \frac{-x}{-sh(x)} = f(x)$. Donc f est paire. Limite en $+\infty$: le plus fort dans le sh est e^x d'où $f(x) = \frac{2x}{e^x(1-e^{-2x})} = \frac{x}{e^x}\frac{2}{1-e^{-2x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après les croissances comparées.

   (b) h est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $h'(x) = ch(x) - ch(x) - xsh(x) = -xsh(x) \leq 0$ car $x \geq 0$ donc $sh(x) \geq 0$. Donc h est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et comme $h(0) = 0$, h est négative sur $\mathbb{R}^+$.

   (c) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \frac{sh(x) - x\,ch(x)}{(sh(x))^2} = \frac{h(x)}{(sh(x))^2}$. Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et par parité, f est croissante sur $\mathbb{R}_-^*$.

5. (a) $x \neq 0 \Rightarrow e^x \neq 1$ d'où $\sum\limits_{k=0}^{n} e^{kx} = \sum\limits_{k=0}^{n} (e^x)^k = \frac{1-(e^x)^{n+1}}{1-e^x} = \frac{e^{(n+1)x/2}[e^{-(n+1)x/2} - e^{(n+1)x/2}]}{e^{x/2}[e^{-x/2} - e^{x/2}]}$
   $= \frac{-e^{(n+1)x/2}}{-e^{x/2}}\frac{e^{(n+1)x/2} - e^{-(n+1)x/2}}{e^{x/2} - e^{-x/2}} = e^{(\frac{(n+1)x}{2} - \frac{x}{2})}\ \frac{2sh((n+1)x/2)}{2sh(x/2)} = e^{\frac{n}{2}x}[\frac{sh((n+1)x/2}{sh(x/2)}]$.

   (b) On applique l'égalité précédente en $-x$ ($-x \in \mathbb{R}^*$ puisque $x \in \mathbb{R}^*$),
   d'où $\sum\limits_{k=0}^{n} e^{-kx} = e^{-\frac{n}{2}x}[\frac{sh(-(n+1)x/2)}{sh(-x/2)}] = e^{-\frac{n}{2}x}[\frac{-sh((n+1)x/2)}{-sh(x/2)}] = e^{-\frac{n}{2}x}[\frac{sh((n+1)x/2)}{sh(x/2)}]$ par imparité de sh.

   (c) Pour $x \neq 0$, $\sum\limits_{k=0}^{n} ch(kx) = \frac{1}{2}[\sum\limits_{k=0}^{n} e^{kx} + \sum\limits_{k=0}^{n} e^{-kx}] = \frac{1}{2}[e^{\frac{n}{2}x} + e^{-\frac{n}{2}x}]\frac{sh((n+1)x/2)}{sh(x/2)} = ch(nx/2)\frac{sh((n+1)x/2)}{sh(x/2)}$

Exercice 3: `inspiré d'un exercice d'oral (escp 2014 1.02)`

Nous noterons $(*)$ la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + r^n u_n$.

1. Pour $r = 0$: $(*)$ en $n = 0$: $u_2 = u_1 + u_0$ ($0^0 = 1$), puis pour tout $n \geq 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 0$. Donc la suite est stationnaire (constante au moins à partir du rang $n = 2$).

2. Pour $r = 1$ $(*)$ devient : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Suite récurrente linéaire d'ordre 2. On résout $x^2 = x + 1$. $\Delta = 5$ $r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Donc $\exists!(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = a(r_1)^n + b(r_2)^n$. Il reste à résoudre le système $\begin{cases} a+b=0 \\ ar_1 + br_2 = 1 \end{cases}$ Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n + \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$.
   Pour la limite, il faut remarquer que $\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$ d'où $2 < \sqrt{5} < 3$ d'où par construction (à justifier), $-1 < r_1 < 1$ et $r_2 > 1$. Donc $r_1^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $r_2^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc la suite u diverge.
   Pour le cas général, il faut résoudre le système comme avant : on trouve $a = u_0 - b$ et $b = \frac{1}{\sqrt{5}}(u_1 - u_0 r_1)$. Vu le calcul de limites précédent, la suite converge ssi $b = 0$ càd ssi $u_1 = u_0 r_1$ (et alors elle converge vers 0).

3. Récurrence double : $n = 2$: $u_2 = u_1 + u_0 \geq u_1 = (2-1)u_1$ et $u_3 = u_2 + ru_1 \geq u_1 + u_1$ $(r \geq 1)$, $= (3-1)u_1$. Supposons pour un certain n, $u_n \geq (n-1)u_1$ et $u_{n+1} \geq nu_1$. Alors $u_{n+2} \geq u_{n+1} + u_n$ $(r \geq 1)$, $\geq (2n-1)u_1 \geq (n+1)u_1$ car $n \geq 2$ donc $n-1 \geq 1$ et $2n-1 \geq n+1$. Conclure. Par comparaison, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$: la suite u diverge.

4. (a) Récurrence simple, hérédité : supp. $v_n = u_1 \prod\limits_{k=1}^{n-1}(1+r^{k-1}$, alors $v_{n+1} = v_n(1+r^{n-1}) = u_1 \prod\limits_{k=1}^{n-1}(1+r^{k-1})(1+r^{n-1})$ $= u_1 \prod\limits_{k=1}^{n}(1+r^{k-1})$. Puis $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq 0$ (produit de termes positifs) et $v_{n+1} - v_n = r^{n-1}v_n \geq 0$.
   (b) Poser $f(x) = x - \ln(1+x)$. Faire le TV complet de f pour obtenir son signe.
   (c) Somme géométrique : $\sum\limits_{k=1}^{n-1} r^{k-1} = \sum\limits_{j=0}^{n-2} r^j = \frac{1-r^{n-1}}{1-r} \leq \frac{1}{1-r}$ car $\frac{r^{n-1}}{1-r} \geq 0$.
   (d) $\ln(v_n) \overset{(a)}{=} \ln(u_1) + \ln(\prod\limits_{k=1}^{n-1}(1+r^{k-1})) = \ln(u_1) + \sum\limits_{k=1}^{n-1}\ln(1+r^{k-1}) \overset{(b)}{\leq} \ln(u_1) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} r^{k-1} \overset{(c)}{\leq} \ln(u_1) + \frac{1}{1-r}$
   (e) $\forall n \geq 2$, $v_n \leq e^{\ln(u_1)+1/(1-r)}$ constante indépendante de n, et supérieure à v_1, donc majorant de toute la suite v.
   (f) Récurrence double immédiate, puis pour $n \geq 1$, $(*)$ donne, $u_{n+1} = u_n + r^{n-1}u_{n-1}$ d'où $u_{n+1} - u_n = r^{n-1}u_{n-1} \geq 0$. Et pour $n = 0$, par hypothèse, $u_1 \geq u_0$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$ et la suite u est croissante.

(g) Encore une récurrence double,
initialisation : $n = 1$ direct, et pour $n = 2$, $u_2 = u_1 + ru_0 \leq u_1 + ru_1$ par croissance de u, donc $u_2 \leq (1 + r)u_1 \leq 2u_1 = v_2$ puisque $r < 1$.
hérédité : supp. $u_n \leq v_n$ et $u_{n+1} \leq v_{n+1}$ alors $(*)$ donne : $u_{n+2} \leq v_{n+1} + r^n v_n$
$\leq v_{n+1} + r^n v_{n+1}$ (v suite croissante) $= (1 + r^n)v_{n+1} = v_{n+2}$. Donc $(u_n)_{n\geq 1}$ est majorée par le majorant de v, donc (comme elle est croissante), elle converge. Donc la suite u converge.