Préparation DS N°4

Fonctions Réelles

Développements limités

Exercice 12: *pour s'entraîner*

Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 des fonctions suivantes : a) $x \mapsto \ln(1+x)\cos(x)$
b) $x \mapsto \sin(2x)$ c) $x \mapsto xe^{2x+1}$ d) $x \mapsto \frac{1-\cos(x)}{x^2}$ e) $x \mapsto \frac{e^x}{1+x}$ f) $x \mapsto \arctan x$ (ordre 2)

Exercice 13:

En utilisant un développement limité à un ordre convenable, donner un équivalent simple en 0 de :
a) $e^x - \cos(x) - \sin(x)$ b) $\ln(1+x) - x$ c) $e^{x+1} - (1+x)^e - (e-1)$

Formules de Taylor

Exercice 1:

A l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer
a) $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ 1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{1}{2}x^2$ b) $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{1}{2}x$
c) $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$ d) $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ x - \frac{1}{6}x^3 \leq \sin x \leq x$

Exercice 9:

Pour tout $x > 0$, on considère la série de terme général $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$, avec $n \geq 0$.

1. Montrer que la série converge. On note $g(x)$ la somme de la série. Que vaut $g(1)$?
2. A l'aide d'une formule de Taylor, montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u \geq 0$: $\left|e^{-u} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k u^k}{k!}\right| \leq \frac{u^{n+1}}{(n+1)!}$.
3. a) Montrer alors que pour tout $x \geq 1$, $\left|\int_0^1 u^{x-1}e^{-u}du - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{k!(k+x)}\right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \times \frac{1}{x+n+1}$.

   b) En déduire que pour tout $x \geq 1$, $\int_0^1 u^{x-1}e^{-u}du = g(x)$.
   bonus : montrer que le résultat précédent reste vrai si $0 < x < 1$.

Exercice 10: *le grand classique des sujets EML*

Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$.

1. a) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
   b) Déterminer la monotonie de f.
   c) Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis $-\infty$, et dresser le TV de f en précisant $f(0)$.
2. (a) Montrer que pour tout $u \in [-1, 1]$, $|e^{-u} - 1 + u| \leq \frac{3u^2}{2}$ à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange.
   (b) En déduire que :$\forall x \in \mathbb{R}, \forall h \in [-1, 1], \forall t \in [0, 1]$, $|e^{-(x+h)t} - e^{-xt} + hte^{-xt}| \leq h^2\, \frac{3t^2}{2} e^{-xt}$
   Montrer alors : $\left|f(x+h) - f(x) + h\int_0^1 \frac{te^{-xt}}{1+t^2}dt\right| \leq \frac{3h^2}{2}\int_0^1 \frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}dt$.
   (c) En déduire que f est dérivable en tout $x \in \mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\int_0^1 \frac{te^{-xt}}{1+t^2}dt$.