Préparation DS N°5
Polynômes

Questions :

2. Soit A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.
3. Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2x + y, x - y)$, est bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et déterminer sa fonction réciproque f^{-1}.

Exercice 1: Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie I

On note E l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant : $P(0) = 0$ et $P(X^2 + 1) = P(X)^2 + 1$.

1. Dans cette question, on considère un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, et on suppose que $P \in E$.
   (a) calculer $P(1)$, $P(2)$ et $P(5)$.
   On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + 1$.
   (b) Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $P(u_n) = u_n$.
   (c) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
   (d) En déduire que $P(X) = X$. *indication :*on pourra considérer le polynôme $Q(X) = P(X) - X$.
2. Déterminer alors l'ensemble E.
3. Ecrire une fonction Scilab, qui prend en entrée un entier n, et qui renvoie la valeur de u_n.

Partie II

On considère dans cette partie, la suite de polynômes (P_n), à coefficients réels, définie par :
$P_0(X) = 2$, $P_1(X) = X + 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+2}(X) = \frac{1}{2}(2X + 1)P_{n+1}(X) - \frac{1}{16}P_n(X)$.

1. Calculer $P_2(X)$.
2. (a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $P_n(0) = \frac{2(n+1)}{4^n}$.
   (b) Ecrire un programme Scilab qui demande n à l'utilisateur et qui affiche la somme $\sum_{k=0}^{n} P_k(0)$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est de degré n, et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est unitaire (c'est-à-dire de coefficient dominant 1).
4. (a) On pose le polynôme $H(X) = (1 - X)\sum_{k=0}^{n} X^k$. Calculer $H(X)$, puis, de deux manières différentes, $H'(X)$. En déduire que $(1 - X)^2 \sum_{k=1}^{n} kX^{k-1} = -(n + 1)X^n(1 - X) + 1 - X^{n+1}$.
   (b) Donner alors, pour tout $q \in [0, 1[$, une formule pour la somme : $\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}$.
   (c) Calculer enfin $\sum_{k=0}^{n} P_k(0)$.
   (d) Réécrire le programme de la question 1. sans boucle for.

Fin

Corrigé

Exercice 1:

I

1. (a) On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x^2+1) = P(x)^2+1$ $(*)$ donc $P(1) = P(0^2+1) = P(0)^2+1 = 1$; $P(2) = P(1^2+1) = P(1)^2+1 = 2$ et enfin, $P(5) = P(2^2+1) = P(2)^2+1 = 5$.

   (b) Par récurrence : $P(u_0) = P(0) = 0 = u_0$ par hypothèse. Puis si, pour un certain n, on a $P(u_n) = u_n$ alors $P(u_{n+1}) = P(u_n^2+1) = P(u_n)^2+1$ d'après $(*)$, d'où par H.R., $P(u_{n+1}) = u_n^2+1$ et par définition de la suite, on obtient $P(u_{n+1}) = u_{n+1}$. Conclure.

   (c) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, "$u_{n+1} > u_n$". Or $u_1 = 1 > 0 = u_0$ et si on sait que $u_{n+1} > u_n$, alors par stricte croissance de $x \to x^2$ sur $\mathbb{R}^+$, $u_{n+1}^2 > u_n^2$ (la suite est positive par récurrence immédiate) d'où $u_{n+1}^2+1 > u_n^2+1$, et finalement $u_{n+2} > u_{n+1}$. Conclure.

   (d) D'après 1.(b), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q(u_n) = 0$ donc u_n est racine de Q. Comme la suite est strictement croissante, il y a une infinité de valeurs prises par la suite (u_n) donc Q admet une infinité de racines. D'où Q est le polynôme nul et $P(X) = X$.

2. La question 1 a permis de montrer que le seul polynôme qui pouvait être dans E était $P(X) = X$. Or si $P(X) = X$ alors $P(0) = 0$, et $P(X^2+1) = X^2+1 = P(X)^2+1$ donc on a bien $P \in E$. Finalement, $E = \{X\}$.

3. `function y=suite(n); u=0; for k=1:n, u=u^2+1, end, y=u, endfunction`

II

1. $P_2(X) = \frac{1}{2}(2X+1)P_1(X) - \frac{1}{16}P_0(X) = X^2 + \frac{3}{2}X + \frac{3}{8}$.

2. (a) Par récurrence double : $P_0(0) = 2$ et $2\frac{0+1}{4^0} = 2$; $P_1(0) = 1$ et $2\frac{1+1}{4^1} = 1$.
   Supposons que $P_n(0) = 2\frac{n+1}{4^n}$ et $P_{n+1}(0) = 2\frac{n+2}{4^{n+1}}$, alors par définition de la suite
   $P_{n+2}(0) = \frac{1}{2}(0+1)P_{n+1}(0) - \frac{1}{16}P_n(0) = 2[\frac{1}{2}\frac{n+2}{4^{n+1}} - \frac{n+1}{4^{n+2}}] = 2[\frac{2(n+2)-(n+1)}{4^{n+2}}] = 2\frac{n+3}{4^{n+2}}$. Conclure.

   (b) `n=input('entrer n') ; s=0; for k=0:n, s=s+2*0(k+1)/4^k, end, disp(s)`

3. $P_0(X) = 2$ est de degré 0. Il reste à montrer par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est de degré n et unitaire. On a déjà : $P_1 = X+1$ unitaire de degré 1 et d'après 1., P_2 est unitaire de degré 2.
   Supposons que P_n et P_{n+1} sont unitaires de degré n et $n+1$. Alors $deg(\frac{1}{2}(2X+1)P_{n+1}(X)) = 1 + deg(P_{n+1}) = n+2$ et $deg(-\frac{1}{6}P_n(X)) = n \neq n+2$ donc par somme, $deg(P_{n+2}(X)) = n+2$ et le terme dominant vient de : $\frac{1}{2}(2X)P_{n+1}(X) = XP_{n+1}(X)$ donc comme P_{n+1} est unitaire, P_{n+2} le sera aussi.
   (On aurait aussi pu écrire $P_{n+1}(X) = X^{n+1} + reste$ pour le voir ....) Ccl.

4. (a) $H(X) = \sum_{k=0}^{n}(1-X)X^k = \sum_{k=0}^{n}(X^k - X^{k+1}) = 1 - X + X - X^2 + X^2 - X^3 + ... + X^- X^{n+1} = 1 - X^{n+1}$ (somme télescopique). Attention de ne pas utiliser de formule de somme géométrique (uniquement vraie avec des réels, pas des "trucs") d'où $H'(X) = -(n+1)X^n$ et par ailleurs, comme $H(X) = (1-X)\sum_{k=0}^{n}X^k$, $H'(X) = -\sum_{k=0}^{n}X^k + (1-X)\sum_{k=0}^{n}kX^{k-1}$. d'où $(1-X)^2\sum_{k=0}^{n}kX^{k-1} = (1-X)H'(X) + (1-X)\sum_{k=0}^{n}X^k = (1-X)H'(X) + H(X) = (1-X)(-(n+1)X^n) + 1 - X^{n+1}$ Il reste à réaliser que le premier terme de la somme est nul, donc partir de $k=0$ ou de $k=1$ revient au même.

   (b) Il suffit de prendre $X = q \in [0,1[$ dans le a), puis de diviser par $(1-q)^2 \neq 0$ (là on peut diviser, car on est dans les réels!! mais attention, dans la question précédente, on travaille avec des polynômes donc pas de dénominateur possible) : $\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = \frac{-(n+1)q^n(1-q)+1-q^{n+1}}{(1-q)^2}$.

   (c) $\sum_{k=0}^{n} P_n(0) = 2\sum_{k=0}^{n}(k+1)(\frac{1}{4})^k = 2\sum_{j=1}^{n+1} j(\frac{1}{4})^{j-1} = 2\frac{-(n+1)(1/4)^n(3/4)+1-(1/4)^{n+1}}{(3/4)^2}$

   (d) `n=input(' entrer n') ; s= 2*(-(n+1)*(1/4)^n * 3/4 + 1 -(1/4)^(n+1))/((3/4)^2); disp(s)`