Devoir Surveillé N°5

Ensembles & Applications Matrices & Polynômes

15 Février 2020

4 heures

Exercices

Problème A

On considère les trois matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ci dessous :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 5 & -4 & -5 \\ -8 & 8 & 6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. On pose :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que V_1, V_2 et V_3 sont des vecteurs propres de la matrice M, et préciser les valeurs propres associées.

2. En déduire une matrice P telle que $MP = PD$.

3.(a) Vérifier que $X^3 + X^2 + 1$ est un polynôme annulateur de P.

(b) En déduire que P est inversible et déterminer P^{-1}.

4. Soit X une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $Y = P^{-1}XP$.

(a) Vérifier que : $Y^2 = P^{-1}X^2P$.

(b) Montrer que X vérifie l'équation

$$(*) \quad : \quad X^2 - 4X + I = M$$

si et seulement si Y vérifie

$$(**) \quad : \quad Y^2 - 4Y + I = D.$$

5.(a) Déterminer la matrice Y diagonale vérifiant l'équation $(**)$ et dont les coefficients diagonaux sont tous inférieurs à 2.

(b) En déduire une matrice X solution de l'équation $(*)$.
On explicitera les neuf coefficients de la matrice X.

Problème B

Partie I

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Trouver une matrice P inversible vérifiant toutes les conditions ci-dessous :
   - ⋆ La matrice $D_2 = P^{-1}BP$ est égale à $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,
   - ⋆ Les coefficients situés sur la première ligne de P sont 1, 1 et -1 (de gauche à droite),
   - ⋆ La matrice $D_1 = P^{-1}AP$ est également diagonale.

Partie II

On pose $X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, et pour tout entier naturel n : $X_{n+2} = \dfrac{1}{6}AX_{n+1} + \dfrac{1}{6}BX_n$.

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite matricielle définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_n = P^{-1}X_n$.

1. Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_{n+2} = \frac{1}{6}D_1Y_{n+1} + \frac{1}{6}D_2Y_n.$$

2. Pour tout entier naturel n, on note : $Y_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

   Déduire de la question précédente que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+2} &= \dfrac{1}{2}\, a_{n+1} + \dfrac{1}{2}\, a_n \\ b_{n+2} &= \dfrac{1}{2}\, b_{n+1} \\ c_{n+2} &= \dfrac{2}{3}\, c_{n+1} + \dfrac{1}{3}\, c_n \end{cases}$$

3. Démontrer que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, puis calculer les matrices Y_0 et Y_1.
4. Pour tout entier naturel n, calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.
5. En déduire l'expression de X_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

   On notera $X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$, et on vérifiera que :
$$\beta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} - \frac{4}{3}.$$

Problème C

CORRIGE

Problème A

1. Les vecteurs V_1, V_2, V_3 sont non nuls et vérifient :

$$MV_1 = V_1, \quad MV_2 = 6V_2, \quad MV_3 = -2V_3$$

Ce sont bien des vecteurs propres, V_1 est associé à la valeur propre 1, V_2 est associé à la valeur propre 6, V_3 est associé à la valeur propre -2.

2. $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et admet trois valeurs propres distinctes, donc M est diagonalisable. En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, la matrice P est inversible et on a $M = PDP^{-1}$, autrement dit $MP = PD$.

3. (a) $P^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $P^3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. On obtient $P^3 + P^2 + I_3 = 0$, donc $X^3 + X^2 + 1$ est bien un polynôme annulateur de P.

   (b) On en déduit que, $-P^3 - P^2 = I_3 \Longrightarrow P(-P^2 - P) = I_3$, donc P est inversible et :

$$P^{-1} = -P^2 - P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. (a) $Y^2 = (P^{-1}XP)(P^{-1}XP) = P^{-1}X(PP^{-1})XP = P^{-1}X^2P$.

   (b)

$$\begin{aligned} X^2 - 4X + I = M &\Longleftrightarrow P^{-1}(X^2 - 4X + I)P = P^{-1}MP \\ &\Longleftrightarrow (P^{-1}X^2P) - 4(P^{-1}XP) + (P^{-1}P) = (P^{-1}MP) \\ &\Longleftrightarrow Y^2 - 4Y + I_3 = D \end{aligned}$$

5. (a) Soit $Y = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ une matrice diagonale. Alors $Y^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{aligned} Y^2 - 4Y + I = D &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 - 4a + 1 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 - 4b + 1 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 - 4c + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} a^2 - 4a + 1 & = 1 \\ b^2 - 4b + 1 & = 6 \\ c^2 - 4c + 1 & = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rl} a^2-4a & =0 \\ b^2-4b-5 & =0 \\ c^2-4c+3 & =0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ll} a=0 \ \text{ ou } a=4 & (\Delta_a=16) \\ b=-1 \ \text{ ou } b=5 & (\Delta_b=36) \\ c=1 \ \text{ ou } c=3 & (\Delta_c=4) \end{array}\right.$$

Si on impose que $a \leqslant 2$, $b \leqslant 2$, $c \leqslant 2$, alors :

$$Y^2-4Y+I=D \iff \left\{\begin{array}{l} a=0 \\ b=-1 \\ c=1 \end{array}\right. \iff Y=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) On sait que $Y=P^{-1}XP$, donc $X=PYP^{-1}$.
On obtient : $PY=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ ou $YP^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, puis $X=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Problème B

Partie I

3. Posons $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 Remarquons alors que $BX_1 = 3X_1$, $BX_2 = 0$ et $BX_3 = 2X_3$. Ainsi, la famille (X_1, X_2, X_3) est une famille de trois vecteurs propres de B associés à trois valeurs propres distinctes, donc cette famille est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de vecteurs propres de B. Donc d'après la formule de changement de base, en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a: $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
 De même, en remarquant que : $AX_1 = 3X_1$, $AX_2 = 3X_2$ et $AX_3 = 4X_3$, on obtient :
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Partie II

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_{n+2} = P^{-1}X_{n+2} = \frac{1}{6}P^{-1}AX_{n+1} + \frac{1}{6}P^{-1}BX_n = \frac{1}{6}(P^{-1}AP)P^{-1}X_{n+1} + \frac{1}{6}(P^{-1}BP)P^{-1}X_n$
$$\boxed{\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_{n+2} = \frac{1}{6}D_1 Y_{n+1} + \frac{1}{6}D_2 Y_n}$$

2. L'égalité précédente s'écrit aussi :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ b_{n+2} \\ c_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$
On a donc bien : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+2} = \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n \\ b_{n+2} = \frac{1}{2}b_{n+1} \\ c_{n+2} = \frac{2}{3}c_{n+1} + \frac{1}{3}c_n \end{cases}}$

3. Le calcul matriciel : $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$ nous permet directement de conclure :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(On peut également déterminer P^{-1} grâce à la méthode du pivot de Gauss). On obtient alors :

$$Y_0 = P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ et } : Y_1 = P^{-1}X_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4. La suite (a_n) est une suite récurrente linéaire double, d'équation caractéristique : $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$. Cette équation admet deux solutions : 1 et $-\frac{1}{2}$, donc il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \lambda + \mu \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

De plus, $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_1 = 1 \end{cases}$, donc : $\begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ \lambda - \frac{1}{2}\mu = 1 \end{cases}$, c'est-à-dire : $\lambda = \frac{4}{3}$ et $\mu = \frac{2}{3}$.
Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

De même, la suite (c_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, admettant pour équation caractéristique : $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0$. Cette équation admet deux solutions : 1 et $-\frac{1}{3}$, donc il existe deux réels λ et μ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \lambda + \mu \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.
De plus, $\begin{cases} c_0 = 1 \\ c_1 = -1 \end{cases}$, donc : $\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda - \frac{1}{3}\mu = -1 \end{cases}$, c'est-à-dire : $\lambda = -\frac{1}{2}$ et $\mu = \frac{3}{2}$.
Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

Enfin, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme : $b_1 = 1$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Or, $b_0 = 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$, donc finalement : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad b_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad c_n = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

5. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n = PY_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{11}{6} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ -\frac{11}{6} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{3}{2}\left(\frac{-1}{3}\right)^n \end{pmatrix}},$$

et on retrouve bien le résultat demandé pour β_n.