Matrices & Probas

Durée 4 heures

Documents & Calculatrices Interdits

EXERCICE 1

Partie I : calcul matriciel

On considère les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & -9 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer PQ.
   En déduire que P est inversible et préciser la matrice P^{-1}.
2. Montrer que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ sont trois vecteurs propres de M, et préciser à quelles valeurs propres ils sont associés.
3. En déduire une matrice diagonale D (à préciser) telle que $M = \frac{1}{6}PDQ$.
4. Établir que pour tout entier naturel n, on a :
$$M^n = \frac{1}{6}PD^nQ.$$
5. Justifier que la première colonne de la matrice M^n est :
$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5^n - 2^{n+2} + 9 \\ 2(5^n - 2^n) \\ 3(5^n + 2^{n+1}) - 9 \end{pmatrix}.$$

Partie II : étude de l'entraînement d'un athlète au triathlon

Les trois sports du triathlon sont : la natation, le cyclisme et la course à pied.
Un athlète décide de pratiquer un sport par jour pour s'entraîner au triathlon. Il commence son entraînement par la natation, au jour 0.
Son entraînement obéit ensuite aux règles suivantes (valables pour tout entier naturel n) :

- si l'athlète a pratiqué la natation le jour n, alors il pratiquera au jour $n+1$:
  — la natation avec probabilité $1/5$
  — le cyclisme avec probabilité $1/5$
  — la course à pied avec probabilité $3/5$
- si l'athlète a pratiqué le cyclisme le jour n, alors il pratiquera au jour $n+1$:
  — la natation avec probabilité $2/5$
  — le cyclisme avec probabilité $3/5$
- si l'athlète a pratiqué la course à pied le jour n, alors il pratiquera au jour $n+1$:
  — le cyclisme avec probabilité $1/5$
  — la course à pied avec probabilité $4/5$

Pour tout entier naturel n, on désigne par :

- A_n l'événement « l'athlète s'entraîne à la natation le jour n » et par a_n la probabilité de A_n.
- B_n l'événement « l'athlète s'entraîne au cyclisme le jour n » et par b_n la probabilité de B_n.
- C_n l'événement « l'athlète s'entraîne à la course à pied le jour n » et par c_n la probabilité de C_n.

1. Que valent a_0, b_0, c_0, a_1, b_1 et c_1 ?
2. A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier naturel n on a :
$$a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n.$$
Exprimer de même les probabilités b_{n+1} et c_{n+1} en fonction des probabilités a_n, b_n et c_n.
3. Déterminer alors la matrice A telle que, pour tout entier naturel n :
$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$
et exprimer A en fonction de la matrice M de la partie I.
4. Établir que pour tout entier naturel n:
$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{5^n}M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
5. En déduire alors l'expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
6. Déterminer les limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n).

EXERCICE 2

Partie I : tirages dans une urne

Une urne $\mathcal{U}$ contient 1 boule noire et 3 boules blanches indiscernables au toucher.

1. On procède à 400 tirages successifs avec remise d'une boule dans $\mathcal{U}$. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de fois où la boule noire a été piochée.
   (a) Quelle est la loi de X ?
   On précisera $X(\Omega)$ et $P(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
   (b) Donner la valeur de l'espérance de X notée $E(X)$ et vérifier que la variance de X, notée $V(X)$ est égale à 75.
2. On procède cette fois-ci dans $\mathcal{U}$ à une suite de tirages avec remise d'une boule jusqu'à obtenir la boule noire. On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
   (a) Quelle est la loi de Y ?
   On précisera $Y(\Omega)$ et $P(Y = k)$ pour tout $k \in Y(\Omega)$.
   (b) Donner la valeur de $E(Y)$ et vérifier que $V(Y) = 12$.
3. Cette fois-ci, on pioche dans l'urne $\mathcal{U}$ successivement et sans remise les quatre boules. On note Z le numéro du tirage auquel est apparue la boule noire.
   (a) Quelle est la loi de Z ? On précisera $Z(\Omega)$ et $P(Z = k)$ pour tout $k \in Z(\Omega)$.
   (b) Donner les valeurs de $E(Z)$ et de $V(Z)$.

Partie II : tirages dans une urne choisie au hasard

L'urne $\mathcal{U}$ contient toujours 1 boule noire et 3 boules blanches indiscernables au toucher. L'urne $\mathcal{V}$ contient 2 boules noires et 2 boules blanches indiscernables au toucher.
On lance une pièce équilibrée. Si elle retombe sur le côté Pile, on tire deux boules successivement et avec remise dans $\mathcal{U}$, et si on obtient Face, on tire deux boules successivement et avec remise dans $\mathcal{V}$.
On note T la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'on a pioché une boule noire.

1. Que vaut $T(\Omega)$?
2. Donner la loi de T. On vérifiera que $P(T=1)=\dfrac{7}{16}$.
3. Calculer $E(T)$. La variable aléatoire T suit-elle une loi binomiale ?
4. Sachant que l'événement $[T=1]$ est réalisé, est-il plus probable d'avoir obtenu Pile ou d'avoir obtenu Face avec la pièce ?

EXERCICE 3

On considère une urne U contenant deux boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher, ainsi qu'une urne V contenant une boule blanche et trois boules noires, elles aussi indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages d'une boule dans ces urnes en procédant comme suit :

- le premier tirage a lieu dans l'urne U;
- tous les tirages s'effectuent avec remise de la boule piochée dans l'urne dont elle provient;
- si l'on pioche une boule **blanche** lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans **l'autre** urne;
- si l'on pioche une boule **noire** lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans **la même** urne.

Partie I - Étude de l'urne du n-ième tirage

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on note U_n l'événement « le n-ième tirage s'effectue dans l'urne U ».
Puisque le premier tirage a lieu dans l'urne U, l'événement U_1 est certain : $P(U_1)=1$.

1. Calculer $P(U_2)$.
2. Donner les valeurs de $P_{U_2}(U_3)$ et de $P_{\overline{U_2}}(U_3)$.
   En déduire $P(U_3)$.

3.(a) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, que valent $P_{U_n}(U_{n+1})$ et $P_{\overline{U_n}}(U_{n+1})$?

(b) En déduire que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:
$$P(U_{n+1})=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}P(U_n).$$

(c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue α :
$$\alpha=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\alpha.$$

(d) Déterminer alors la valeur de $P(U_n)$ en fonction de n.

(e) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(U_n)$.

E

—

Partie II - Étude du nombre de boules blanches

Pour tout entier naturel non nul n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches piochées au cours des n premiers tirages.

1. Déterminer la loi de X_1.

2.(a) Donner les valeurs de :

$$P_{[X_1=0]}(X_2 = 0), \quad P_{[X_1=0]}(X_2 = 1), \quad P_{[X_1=1]}(X_2 = 1) \quad \text{et} \quad P_{[X_1=1]}(X_2 = 2).$$

(b) En déduire la loi de X_2.

(c) Vérifier que $E(X_2) = \dfrac{19}{18}$.

4. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, déterminer $X_n(\Omega)$.
Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, calculer $P(X_n = 0)$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Expliquer pourquoi après avoir obtenu au cours des n premiers tirages un nombre pair de boules blanches, le tirage de la $(n+1)$-ième boule s'effectuera dans U.

On admettra de même qu'après avoir obtenu au cours des n premiers tirages un nombre impair de boules blanches, le tirage de la $(n+1)$-ième boule s'effectuera dans V.

6. À l'aide de la formule des probabilités totales, démontrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{3}{4} \times P(X_n = 1) + \frac{2}{3} \times P(X_n = 0) \qquad (R_1).$$

7. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(\dfrac{4}{3}\right)^n \times P(X_n = 1)$.
Déduire du résultat (R_1), que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{8}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

8.(a) Montrer par récurrence que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{8}{5}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right).$$

(b) En déduire, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, la valeur de $P(X_n = 1)$ en fonction de n.

(c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 1)$.

Partie Informatique à traiter séparément

Exercice1 :

PartieI :

Q1.b / (Scilab) Ecrire les commandes Scilab permettant de :

- Affecter aux variables de votre choix, les valeurs des trois matrices M,P et Q, définies ci-dessus ;
- Calculer le produit matriciel PQ ;
- Calculer l'inverse de P.

Partie II

Q4 :

b/(Scilab) Compléter le programme Scilab ci-dessous qui doit, pour un entier naturel n donné par l'utilisateur, calculer et afficher a_n ,b_n et c_n.

```
n=...........
Mn=..........     //repésente la matrice M^n
[a;b;c]=......
disp(a,b,c)
```

Exercice3 :

Q7/

b. en se basant sur la relation de récurrence démontrée en haut, compléter le programme suivant, qui a pour but de calculer la valeur de u_n pour un entier n donné par l'utilisateur.

```
n=...........
u=8/9
for..........
     u=..........
end
disp(u)
```

BONNE CHANCE

CORRIGÉ

EXERCICE 1

Partie I : calcul matriciel

1.
$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & -9 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 6I_3 \Longrightarrow P \times \left(\frac{1}{6}Q\right) = I_3$$

   Ainsi, P est inversible et $P^{-1} = \dfrac{1}{6}Q$.

2. • En notant $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, on a : $X_1 \neq 0$ et $MX_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} = 5X_1$.
   Ainsi, X_1 est un vecteur propre de M pour la valeur propre 5.
   • En notant $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, on a : $X_2 \neq 0$ et $MX_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = X_2$.
   Ainsi, X_2 est un vecteur propre de M pour la valeur propre 1.
   • En notant $X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, on a : $X_3 \neq 0$ et $MX_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = 2X_3$.
   Ainsi, X_3 est un vecteur propre de M pour la valeur propre 2.

3. La matrice M étant de taille 3 avec 3 valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable. La matrice P comportant dans ses trois colonnes trois vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, en notant $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ la matrice diagonale comportant les valeurs propres correspondantes dans le même ordre, on a donc :
$$M = PDP^{-1} = PD\left(\frac{1}{6}Q\right) = \frac{1}{6}PDQ$$

4. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $M^n = \dfrac{1}{6}PD^nQ$ ».
   • Pour $n = 0$, on a $M^0 = I_3$ et également $\dfrac{1}{6}PD^0Q = PI_3P^{-1} = I_3$, ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est bien vraie.
   • Soit $n \geqslant 0$ fixé. Supposons que pour cet entier n, on ait $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors :
$$M^{n+1} = M^n \times M = \left(\frac{1}{6}PD^nQ\right)\left(\frac{1}{6}PDQ\right) = \frac{1}{6}PD^n\left(\frac{1}{6}QP\right)DQ = \frac{1}{6}PD^{n+1}Q$$
   et ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   • Par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 0$ la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

5. La matrice D étant diagonale, on sait que : $\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

   Calculer la première colonne de M^n revient à multiplier à droite par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. En écrivant donc le produit, et en calculant successivement de droite à gauche les produits de matrices :

$$\begin{aligned}
M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & -9 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n \\ 9 \\ -2^{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5^n - 2^{n+2} + 9 \\ 2(5^n - 2^n) \\ 3(5^n + 2^{n+1}) - 9 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Partie II : étude de l'entraînement d'un athlète au triathlon

1. L'athlète démarrant son entrainement par la natation au jour 0, on a donc $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $c_0 = 0$. Suivant les règles de l'entraînement, au jour 1, on a alors $a_1 = 1/5$, $b_1 = 1/5$, $c_1 = 3/5$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. La famille (A_n, B_n, C_n) forme un système complet d'événements, et avec la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
a_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(C_n \cap A_{n+1}) \\
&= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) \\
&= \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n + 0 \times c_n
\end{aligned}$$

De même, on calcule $P(B_{n+1})$ et $P(C_{n+1})$:

$$b_{n+1} = P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{5}a_n + \frac{3}{5}b_n + \frac{1}{5}c_n$$

et

$$c_{n+1} = P(A_n)P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1}) = \frac{3}{5}a_n + 0 \times b_n + \frac{4}{5}c_n$$

3. On a donc :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n + 0 \times c_n \\ \frac{1}{5}a_n + \frac{3}{5}b_n + \frac{1}{5}c_n \\ \frac{3}{5}a_n + 0 \times b_n + \frac{4}{5}c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & 0 \\ 1/5 & 3/5 & 1/5 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

En notant $A = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & 0 \\ 1/5 & 3/5 & 1/5 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}M$, on a donc bien : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

4. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$
   - Pour $n = 0$, on a bien $Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5^0}M^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   - Soit $n \geqslant 0$ fixé. Supposons que pour cet entier n, on ait montré que : $Y_n = \frac{1}{5^n}M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Alors :

$$Y_{n+1} = AY_n = \left(\frac{1}{5}M\right)\frac{1}{5^n}M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5^{n+1}}M^{n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Par récurrence, on a donc bien que : $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = \frac{1}{5^n} M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. Comme $M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ correspond à la première colonne de M^n, on a d'après I.5 :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{6.5^n} \begin{pmatrix} 5^n - 2^{n+2} + 9 \\ 2(5^n - 2^n) \\ 3(5^n + 2^{n+1}) - 9 \end{pmatrix}.$$

On en déduit donc que :

$$a_n = \frac{5^n - 2^{n+2} + 9}{6 \times 5^n} = \frac{1}{6} - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n + 9\left(\frac{1}{5}\right)^n,$$

$$b_n = \frac{2(5^n - 2^n)}{6 \times 5^n} = \frac{1}{3} - 2\left(\frac{2}{5}\right)^n,$$

$$c_n = \frac{3(5^n + 2^{n+1}) - 9}{6 \times 5^n} = \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{5}\right)^n - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

6. Comme $-1 < 1/5 < 1$ et $-1 < 2/5 < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$. On en déduit finalement que :

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{1}{6}, \qquad \lim_{n \to +\infty} b_n = \frac{1}{3}, \qquad \lim_{n \to +\infty} c_n = \frac{1}{2}.$$

EXERCICE 2

Partie I : tirages dans une urne

1. (a) On reconnaît ici une épreuve succès/échec qui se répète dans des conditions identiques et indépendantes, la probabilité du succès étant à chaque épreuve de $1/4$ (un succès étant de tirer la boule noire). La variable X comptant le nombre de succès sur les 400 épreuves suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}\left(400, \frac{1}{4}\right)$.

   On a donc $X(\Omega) = [\![0, 400]\!]$ et : $\forall k \in X(\Omega), \quad P(X = k) = \binom{400}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{400-k}$.

   (b) L'espérance de X est alors $400 \times \frac{1}{4} = 100$ et la variance est $400 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 75$.

2. (a) On est toujours dans le cadre d'une répétition d'épreuves succès/échec identiques et indépendantes, la probabilité du succès étant à chaque épreuve de $1/4$ (un succès étant de tirer la boule noire). La variable Y déterminant le rang d'apparition du premier succès suit donc une loi géométrique $\mathcal{G}\left(\frac{1}{4}\right)$.

   On a donc $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(Y = k) = \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{4}\right)$.

   (b) L'espérance de Y est alors $\frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$ et la variance est $\frac{\frac{3}{4}}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 12$.

3. (a) Si on tire les boules sans remise, Z ne peut prendre que les valeurs $1, 2, 3, 4$:

$$\boxed{Z(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}}$$

Notonrs B_k (respectivement N_k) « le k-ième tirage donne une boule blanche (resp. noire) ».

- $P(Z=1) = P(N_1) = \frac{1}{4}$.
- $P(Z=2) = P(B_1 \cap N_2) = P(B_1)P_{B_1}(N_2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$
- $P(Z=3) = P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1 \cap B_2}(N_3) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- et nécessairement $P(Z=4) = 1 - P(Z=1) - P(Z=2) - P(Z=3) = \frac{1}{4}$.

Ainsi Z suit une loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$.

(b) L'espérance de Z est donc $\frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$ et la variance est $\frac{4^2-1}{12} = \frac{5}{4}$.

Partie II : tirages dans une urne choisie au hasard

1. Sur les deux tirages effectués on peut avoir tiré 0, 1 ou 2 fois la boule noire. Ainsi $T(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
2. Notons F l'événement « la pièce donne Face »et $\overline{F}$ l'événement « la pièce donne Pile ». Alors :

$$P(T=0) = P(F)P_F(B_1 \cap B_2) + P(\overline{F})P_{\overline{F}}(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{13}{32}$$

$$P(T=2) = P(F)P_F(N_1 \cap N_2) + P(\overline{F})P_{\overline{F}}(N_1 \cap N_2) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{32}$$

On en déduit que :

$$P(T=1) = 1 - P(T=0) - P(T=2) = 1 - \frac{13}{32} - \frac{5}{32} = \frac{14}{32} = \frac{7}{16}$$

3. $E(T) = \sum_{k=0}^{2} kP(T=k) = P(T=1) + 2P(T=2) = \frac{7}{16} + 2\frac{5}{32} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.

Si T suivait une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, on aurait alors nécessairement $n = 2$ (vu $T(\Omega)$), $E(T) = 2p$, donc $p = \frac{3}{8}$. Mais alors on devrait avoir $P(T=2) = p^2$, ce qui n'est pas le cas ici. Donc T ne suit pas une loi binomiale.

4. Remarquons que si F se réalise, alors la loi de T est binomiale de paramètres $(2, 1/2)$. On a donc par exemple :

$$P_F(T=1) = \binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

Donc :

$$P_{[T=1]}(F) = \frac{P(F)P_F(T=1)}{P(T=1)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{7}{16}} = \frac{4}{7}$$

et donc on en déduit que $P_{[T=1]}(\overline{F}) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$.

Finalement, si $[T=1]$ est réalisé, il est plus probable d'avoir obtenu Face avec la pièce.

EXERCICE 3

Partie I - Étude de l'urne du n-ième tirage

1. U_2 se réalise si, au cours du premier tirage, on a tiré (dans l'urne U) une boule noire, donc $P(U_2) = \frac{1}{3}$.

2. Sachant U_2, on fait des tirages dans l'urne U, donc : $P_{U_2}(U_3) = \frac{1}{3}$.
   Sachant $\overline{U_2}$, on fait des tirages dans l'urne V : $P_{\overline{U_2}}(U_3) = \frac{1}{4}$.
   Comme $(U_2, \overline{U_2})$ forme un système complet d'événements, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$P(U_3) = P(U_2 \cap U_3) + P(\overline{U_2} \cap U_3) = P(U_2)P_{U_2}(U_3) + P(\overline{U_2})P_{\overline{U_2}}(U_3) = \frac{1}{3}.\frac{1}{3} + \frac{1}{4}.\frac{2}{3} = \frac{5}{18}$$

3. (a) Sachant U_n, on fait des tirages dans l'urne U, donc : $P_{U_n}(U_{n+1}) = \frac{1}{3}$.
   Sachant $\overline{U_n}$, on fait des tirages dans l'urne V : $P_{\overline{U_n}}(U_{n+1}) = \frac{1}{4}$.

   (b) Comme $(U_n, \overline{U_n})$ forme un système complet d'événements, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(U_{n+1}) &= P(U_n)P_{U_n}(U_{n+1}) + P(\overline{U_n})P_{\overline{U_n}}(U_{n+1}) \\ &= \frac{1}{3}P(U_n) + \frac{1}{4}(1 - P(U_n)) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{12}P(U_n) \end{aligned}$$

   (c) $\alpha = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\alpha \iff \frac{11}{12}\alpha = \frac{1}{4} \iff \alpha = \frac{3}{11}$.

   (d) La suite $\left(P(U_n) - \frac{3}{11}\right)$ est géométrique de raison $\frac{1}{12}$. On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(U_n) = \frac{3}{11} + \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}\left(P(U_1) - \frac{3}{11}\right) = \frac{3}{11} + \frac{8}{11}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}$$

   (e) Puisque $-1 < \frac{1}{12} < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P(U_n) = \frac{3}{11}$.

Partie II - Étude du nombre de boules blanches

1. On a $X_1(\Omega) = \{0,1\}$, et puisqu'on fait un tirage dans l'urne U au premier tirage, on a :
$$P(X_1 = 0) = \frac{1}{3}, \quad \text{et} \quad P(X_1 = 1) = \frac{2}{3}$$
X_1 suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $2/3$.
2. (a) Sachant $[X_1 = 0]$, on fait le deuxième tirage dans l'urne U, donc :
$$P_{[X_1=0]}(X_2 = 0) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P_{[X_1=0]}(X_2 = 1) = \frac{2}{3}$$
Sachant $[X_1 = 1]$, on fait le deuxième tirage dans l'urne V, donc :
$$P_{[X_1=1]}(X_2 = 1) = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad P_{[X_1=1]}(X_2 = 2) = \frac{1}{4}$$
(b) On a $X_2(\Omega) = \{0,1,2\}$.
   - $P(X_2 = 0) = P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = P(X_1 = 0)P_{[X_1=0]}(X_2 = 0) = \frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$
   - $P(X_2 = 2) = P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 2]) = P(X_1 = 1)P_{[X_1=1]}(X_2 = 2) = \frac{2}{3}.\frac{1}{4} = \frac{1}{6}$
   - On en déduit que $P(X_2 = 1) = 1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{6} = \frac{13}{18}$.

(c) $E(X_2) = 0.P(X_2 = 0) + 1.P(X_2 = 1) + 2.P(X_2 = 2) = \frac{13}{18} + \frac{2}{6} = \frac{19}{18}$.
3.
```
    else
        res1=0
        tirage2=grand(1,1,'uin',1,3)
        if tirage2<3 then res2=1
        else res2= 0
        end
    end
```
4. Pour tout $n \geqslant 1$, $X_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$. En effet, il est possible de n'avoir tiré que des boules noires, ou que des boules blanches, et toutes les situations intermédiaires sont possibles.
$[X_n = 0]$ se réalise si et seulement si on obtient n fois de suite une boule noire (donc toujours dans l'urne U), donc par probabilités composées on en déduit que :
$$P(X_n = 0) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$
5. A chaque tirage d'une boule blanche, on change d'urne. Si on a changé un nombre pair de fois d'urne, alors la $(n+1)$-ième boule est bien tirée dans l'urne U.
6. En utilisant le SCE $([X_n = k])_{k\in[\![0,n]\!]}$, on a :
$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) &= \sum_{k=0}^{n} P(X_n = k)P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = 1) \\ &= P(X_n = 0)P_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 1) + P(X_n = 1)P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1) \quad \text{(les autres probas conditionnel} \\ &= \frac{2}{3}P(X_n = 0) + \frac{3}{4}P(X_n = 1) \end{aligned}$$

En effet, si $[X_n = 0]$ est réalisé, le $(n+1)$-ième tirage se fait dans l'urne U, donc $P_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 1) = \frac{2}{3}$ (proba de tirer une boule blanche dans U). De même, si $[X_n = 1]$ est réalisé, le $(n+1)$-ième tirage se fait dans l'urne V, donc $P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1) = \frac{3}{4}$ (proba de tirer une boule noire dans V).

7. Pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} P(X_{n+1} = 1) \\
&= \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} \left(\frac{2}{3}P(X_n = 0) + \frac{3}{4}P(X_n = 1)\right) \\
&= \left(\frac{4}{3}\right)^{n} P(X_n = 1) + \frac{2}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{n} \\
&= u_n + \frac{8}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^{n}
\end{aligned}$$

8. (a)
   - On a $u_1 = \frac{4}{3}P(X_1 = 1) = \frac{4}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{9} = \frac{8}{5}\left(1 - \frac{4}{9}\right)$.
   - Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $u_n = \frac{8}{5}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$. Alors :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{8}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{8}{5}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) + \frac{8}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{8}{5}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}\right)$$

   - Par récurrence, on a donc bien que : $\forall n \geqslant 1, u_n = \frac{8}{5}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$.

   (b) On a donc : $P(X_n = 1) = \left(\frac{3}{4}\right)^n u_n = \frac{8}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{8}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

   (c) Comme $-1 < \frac{3}{4} < 1$ et $0 < \frac{1}{3} < 1$, on en déduit que $\lim_{n \to +\infty} P(X_n = 1) = 0$.