Spécial Confinement

Espaces Vectoriels
Séries Numériques

Préparation DS

Pour aller plus loin : Soit a, b, c trois réels tels que $a < b < c$.
On considère l'application u de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ associe le triplet $(P(a), P(b), P(c))$.

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Montrer que u est injective.
3. Dans cette question uniquement, on suppose que $a = 0$, $b = 1$ et $c = 2$. Montrer que u est surjective.
4. (a) Montrer qu'il existe un unique polynôme $A \in \mathbb{R}_2[X]$, que l'on explicitera, tel que $A(a) = 1$, $A(b) = 0$, $A(c) = 0$ *(on pourra raisonner par analyse et synthèse, sans passer par un système)*.
   (b) Donner sans justification l'expression des deux polynômes B et C de $\mathbb{R}_2[X]$ tels que :
   $B(a) = 0 = B(c)$ et $B(b) = 1$ et $C(a) = C(b) = 0$ et $C(c) = 1$.
5. (a) Montrer que (A, B, C) est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$ (*soyez malins !*).
   On admet que cette famille est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (car elle a le "bon nombre" de vecteurs ... cf chap suivant)
   (b) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (A, B, C).

Aplications linéaires et espaces vectoriels de fonctions : DM 9 année 2014-15

A rédiger et à me rendre :

Question : Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n^2+3}{2^{n+1}}$ converge et déterminer la valeur de sa somme.

Entraînez vous à simplifier puis calculer la valeur de la somme obtenue.

Exercice :

Dans cet exercice, x désige un réel de $]0, \frac{\pi}{2}[$.
Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \cos(x)$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n \cos(\frac{x}{2^{n+1}})$.

1. Ecrire une fonction scilab d'en-tête `function y=suite(n,x)` qui aux paramètres d'entrée n et x associe la valeur u_n.
2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.
   (b) Montrer que la suite (u_n) converge.
3. A l'aide des équivalents usuels, montrer que $\ln(\cos(\frac{x}{2^{n+1}})) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{x^2}{8}(\frac{1}{4})^n$.
   Indication : on pourra remarquer que $\cos(\frac{x}{2^{n+1}}) = 1 + (\cos(\frac{x}{2^{n+1}}) - 1)$.
4. En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0}(\ln(u_n) - \ln(u_{n+1}))$.
5. En calculant les sommes partielles de la série $\sum\limits_{n\geq 0}(\ln(u_n) - \ln(u_{n+1}))$, montrer alors que la suite $(\ln(u_n))$ converge.
6. En déduire (d'une autre façon qu'au 2(a)) que la suite u converge.
7. On pose pour tout entier naturel n, $v_n = u_n \sin(\frac{x}{2^n})$
   (a) Rappeler la formule développée de $\sin(2a)$.
   (b) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
   (c) En déduire l'expression de v_n en fonction de x et de n, puis celle de u_n.
   (d) Déterminer la limite de la suite u. (*on pensera aux équivalents usuels*).

Corrigé

1. Soit $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $u(\lambda P + Q) = (\lambda P(a) + Q(a), \lambda P(b) + Q(b), \lambda P(c) + Q(c))$
$= \lambda(P(a), P(b), P(c)) + (Q(a), Q(b), Q(c)) = \lambda u(P) + u(Q)$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. $P \in Ker(u) \Leftrightarrow u(P) = (0,0,0) \Leftrightarrow P(a) = 0 = P(b) = P(c) \Leftrightarrow a, b, c$ sont 3 racines distinctes de $P \Leftrightarrow P = 0_{\mathbb{R}[X]}$ car $deg(P) \leq 2$. Donc $Ker(u) = \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$ et u est injective.

3. $Im(u) = Vect(u(1), u(X), u(X^2)) = Vect((1,1,1),(0,1,2),(0,1,4))$
$= Vect((1,1,1),(0,1,2),(0,0,1))$ car $\frac{1}{2}((0,1,4) - (0,1,2)) = (0,0,1)$
$= Vect(1,1,1),(0,1,0),(0,0,1))$ car $(0,1,2) - 2*(0,0,1) = (0,1,0)$
$= Vect((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) = \mathbb{R}^3$ car $(1,1,1) - (0,1,0) - (0,0,1) = (1,0,0)$ donc u est surjective.
OU via la compatibilité d'un système (ne pas aller jusqu'à la résolution !!), pour mq que $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, il existe bien $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $u(P) = (x,y,z)$ (définition de la surjection, que l'application soit linéaire ou non).
Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Mq il existe $P(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que
$\begin{cases} P(0) = x \\ P(1) = y \\ P(2) = z \end{cases}$. Or $\begin{cases} \gamma & = x \\ \alpha + \beta + \gamma & = y \\ 4\alpha + 2\beta + \gamma & = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma & = y \\ -2\beta - 3\gamma & = z - 4y \\ \gamma & = x \end{cases}$ système compatible car de Cramer.

4. Ce sont les polynômes d'interpolation de Lagrange (cf DM 4).
a) Analyse : soit A un polynôme qui convient. Alors A est de degré au plus 2, et b et c sont deux racines distinctes, donc $(X-b)(X-c)$ divise A et il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A(X) = (X-b)(X-c)Q(X)$. Or $deg(A) \leq 2 \Rightarrow deg(Q) \leq 0$ d'où $Q(X) = \alpha \in \mathbb{R}$ et $A(X) = \alpha(X-b)(X-c)$. Puis $A(a) = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{(a-b)(a-c)}$.
Un unique candidat : $A(X) = \frac{1}{(a-b)(a-c)}(X-b)(X-c)$.
Synthèse immédiate : ce polynôme convient bien car $A \in \mathbb{R}_2[X]$, $A(a) = 1$ et $A(b) = 0 = A(c)$.
b) De même, on trouve $B(X) = \frac{1}{(b-a)(b-c)}(X-a)(X-c)$ et $C(X) = \frac{1}{(c-a)(c-b)}(X-a)(X-c)$.

5. a) Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda A(X) + \mu B(X) + \nu C(X) = 0_{\mathbb{R}[X]}$. D'habitude, dans les polynômes, on écrit tout sous forme canonique puis on identifie les coefficients ... pour trouver finalement $\lambda = \mu = \nu = 0$. Ici, on a A, B, C sous forme factorisée donc c'est long. Astuce : on utilise le même raisonnement que pour les familles libres de fonctions. On a 3 inconnues, donc il nous suffit de 3 équations.
En $X = a$ on obtient : $\lambda A(a) + \mu B(a) + \nu C(a) = 0$ càd $\lambda = 0$.
De même, en $X = b$ puis en $X = c$, on trouve $\mu = 0 = \nu$.

b) Trouvons les (uniques) (α, β, γ) tels que $P(X) = \alpha A(X) + \beta B(X) + \gamma C(X)$. Même astuce : 3 inconnues, donc il faut 3 équations : on regarde en $X = a$, puis $X = b$ et $X = c$. On trouve $\alpha = P(a)$, $\beta = P(b)$ et $\gamma = P(c)$. Finalement tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ s'écrit $P(X) = P(a)A(X) + P(b)B(X) + P(c)C(X)$.

Partie à rédiger et à rendre :
Question :
Pour tout $n \geq 1$, $\frac{n^2+3}{2^{n+1}} = \frac{n(n-1)+n+3}{2^{n+1}} = \frac{1}{8}[n(n-1)(\frac{1}{2})^{n-2}] + \frac{1}{4}n(\frac{1}{2})^{n-1} + \frac{3}{2}(\frac{1}{2})^n$. On reconnaît une combinaison linéaire de termes généraux de séries géométriques convergentes car $|\frac{1}{2}| < 1$.
Donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n^2+3}{2^{n+1}}$ converge et $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+3}{2^{n+1}} = \frac{1}{8}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(n-1)(\frac{1}{2})^{n-2} + \frac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(\frac{1}{2})^{n-1} + \frac{3}{2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{2})^n$. Les bornes de départ pour les deux premières séries sont les bonnes mais pas pour la 3e d'où
$S = \frac{1}{8}\frac{2}{(1-(1/2))^3} + \frac{1}{4}\frac{1}{(1-1/2)^2} + \frac{3}{2}(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{2})^n - (\frac{1}{2})^0) = 2 + 1 + \frac{3}{2}(\frac{1}{1-1/2} - 1) = \frac{9}{2}$.

Exercice

1. ```
   function y=suite(n,x)
   u=cos(x)
   for i=1:n
   u=u*cos(x/2^i)
   end
   y=u
   endfunction
   ```
2. (a) Par récurrence : $n = 0$, comme $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $u_0 = \cos(x) \in]0, 1[$.
   Supposons que pour un certain $n \geq 0$, $u_n \in]0, 1[$. Alors comme $0 < \frac{x}{2^{n+1}} \leq x < \frac{\pi}{2}$, $\cos(\frac{x}{2^{n+1}}) \in]0, 1[$ et par produit, $u_{n+1} = u_n \cos(\frac{x}{2^{n+1}}) \in]0, 1[$. Conclure.
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n(1 - \cos(\frac{x}{2^{n+1}})) < 0$ puisque $\cos(\frac{x}{2^{n+1}}) < 1$ et $u_n > 0$. Donc la suite u, décroissante et minorée par 0, converge (vers un réel $\ell \in [0, 1]$).
3. Comme $u = \cos(\frac{x}{2^{n+1}}) - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et que $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ on en déduit :
   $\ln(\cos(\frac{x}{2^{n+1}})) = \ln(1 + (\cos(\frac{x}{2^{n+1}}) - 1)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \cos(\frac{x}{2^{n+1}}) - 1$. Il reste à utiliser l'équivalent usuel en 0 du cosinus : $1 - \cos(x) \sim \frac{1}{2}x^2$ d'où $\cos(x) - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$. On obtient : $\cos(\frac{x}{2^{n+1}}) - 1 \sim -\frac{1}{2}(\frac{x}{2^{n+1}})^2 = -\frac{1}{2}\frac{x^2}{2^{2n+2}} = -\frac{1}{8}\frac{x^2}{2^{2n}} = -\frac{1}{8}x^2(\frac{1}{4})^n$ d'où le résultat.
4. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_n) - \ln(u_{n+1}) = \ln(u_n) - (\ln(u_n) + \ln(\cos(\frac{x}{2^{n+1}})) = -\ln(\cos(\frac{x}{2^{n+1}})) \sim \frac{1}{8}x^2(\frac{1}{4})^n$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{8}x^2(\frac{1}{4})^n \geq 0$ et $\ln(u_n) - \ln(u_{n+1}) \geq 0$ (par décroissance de la suite), donc d'après le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, comme la série géométrique de raison $1/4$ converge, on en déduit que la série de terme général $\ln(u_n) - \ln(u_{n+1})$ converge ($\frac{1}{8}x^2$ est une constante).
5. Or si on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1}(\ln(u_k) - \ln(u_{k+1}))$, par télescopage, on a $S_n = \ln(u_0) - \ln(u_n)$. D'après la question précédente, on sait que la suite (S_n) converge (c'est la définition d'une série convergente) : il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. D'où $\ln(u_n) = \ln(u_0) - S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(u_0) - \ell \in \mathbb{R}$.
   Donc la suite $(\ln(u_n))$ converge.
6. En reprenant les notations de la question précédente : $u_n = e^{\ln(u_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{\ln(u_0)-\ell} \in \mathbb{R}$ par continuité de la fonction exponentielle : on retrouve bien que la suite u converge (vers un réel strictement positif).
7. $\sin(2a) = \sin(a + a) = 2\sin(a)\cos(a)$.
8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1}\sin(\frac{x}{2^{n+1}}) = u_n \cos(\frac{x}{2^{n+1}})\sin(\frac{x}{2^{n+1}})$. On reconnaît $\cos(a)\sin(a) = \frac{1}{2}\sin(2a)$ d'où $v_{n+1} = u_n \times \frac{1}{2}\sin(2 \times \frac{x}{2^{n+1}}) = \frac{1}{2}u_n \sin(\frac{x}{2^n}) = \frac{1}{2}v_n$. La suite v est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
9. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = (\frac{1}{2})^n v_0 = (\frac{1}{2})^n \cos(x)\sin(x)$ et donc $u_n = \frac{v_n}{\sin(\frac{x}{2^n})} = (\frac{1}{2})^n \cos(x)\sin(x)\frac{1}{\sin(\frac{x}{2^n})}$
10. Se rappeler qu'en 0, $\sin(u) \sim u$ donc comme $\frac{x}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\sin(\frac{x}{2^n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{2^n}$.
    Finalement, $u_n \sim \frac{\cos(x)\sin(x)}{x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\cos(x)\sin(x)}{x} (= \frac{\sin(2x)}{2x})$. La limite de u est donc le réel $\frac{\cos(x)\sin(x)}{x}$.
   ```