DS N°8

Espaces Vectoriels
Séries Numériques
Spécial Confinement

Durée : 2 heures

Partie I

EXERCICE 1.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(\ln x)$.

1. Donner le domaine de définition de f et vérifier que f' est décroissante sur $[2; +\infty[$.

2a. Montrer que pour tout entier $k \geq 2$ on a

$$f(k+1) - f(k) \leq \frac{1}{k \ln k}$$

2b. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ on a

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} \geq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2)$$

2c. En déduire la nature de la série de terme général $\frac{1}{k \ln k}$.

EXERCICE 2.

1. Étudier la nature des séries suivantes

$$\sum_{n\geq 0} e^{-\sqrt{n}} \quad et \quad \sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{(2n^2+1)(3n+1)}$$

2. Prouver que la série suivante converge et déterminer sa somme :

$$\sum_{n\geq 0} n^2 e^{-n}$$

Partie II

EXERCICE 3.

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à un vecteur $u = (x, y, z)$ associe le vecteur

$$f(u) = (-x - 2y, x + 2y, x + y + z)\ .$$

2. Déterminer une base de $Ker(f)$ puis une base de $Im(f)$.

3. Prouver que f est un projecteur et en déterminer les éléments caractéristiques.

4. Prouver que $Ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^3$.

5. Soit g le projecteur associé à f. Déterminer les coordonnées du vecteur $g(u)$ où $u = (x, y, z)$.

EXERCICE 4

On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.
Soit f l'application définie sur E qui associe à tout polynôme $P \in E$, le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P)(X) = -3XP(X) + X^2P'(X),\ \text{ où } P' \text{est la dérivée du polynôme } P$$

1b. Montrer que f est un endomorphisme de E.

1e. Préciser le noyau $Kerf$ de f ainsi qu'une base de $Kerf$.

1f. Déterminer l'image Imf de f.

CORRIGÉ EXERCICE 1.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(\ln x)$.

1. Donner le domaine de définition de f et vérifier que f' est décroissante sur $[2;+\infty[$.

- f est définie lorsque $\begin{cases} x > 0 \\ \ln x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$
- $f'(x) = \frac{1/x}{\ln x} = \frac{1}{x\ln x}$ et donc $f''(x) = -\frac{\ln x+1}{(x\ln x)^2} < 0$ lorsque $x > 2$ puisqu'alors, $\ln x + 1 > \ln 2 + 1 > 0$

2a. Montrer que pour tout entier $k \geq 2$ on a $f(k+1) - f(k) \leq \frac{1}{k\ln k}$.

Appliquons l'inégalité des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[k;k+1] \subset [2;+\infty[$ pour $k \geq 2$:

- La fonction f est continue sur $[k\,;k+1]$, dérivable sur $]k\,;k+1[$
- Par ailleurs, f' étant décroissante sur $[k;k+1] \subset [2;+\infty[$, elle vérifie
$$\forall x \in [k;k+1],\ \ 0 < f'(k+1) \leq f'(x) \leq f'(k)$$
càd,
$$\forall x \in [k;k+1],\ \ 0 < f'(x) \leq \frac{1}{k\ln k}$$

On obtient alors le résultat par l'inégalité des accroissements finis.

2b. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ on a $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} \geq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2)$.

Sommons l'inégalité 2c de $k = 2$ à $k = n$, il vient
$$\sum_{k=2}^{n} f(k+1) - f(k) \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}$$
Par téléscopage, on trouve alors :
$$f(n+1) - f(2) \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} \ \ \Leftrightarrow\ \ \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}$$

2c. En déduire la nature de la série de terme général $\frac{1}{k\ln k}$. Par composition, $\lim_{n\to\infty} \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) = +\infty$,donc par théorème de comparaison la série terme général $\frac{1}{k\ln k}$ diverge.

CORRIGÉ EXERCICE 2.

1. Étudier la nature des séries suivantes $\sum_{n\geq 0} e^{-\sqrt{n}}$ *et* $\sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{(2n^2+1)(3n+1)}$

- Par croissance comparée, $n^2 \times e^{-\sqrt{n}} \to 0$ donc $e^{-\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$: or la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge donc par critère de comparaison sur les séries de terme général positif, on peut affirmer que $\sum_{n\geq 1} e^{-\sqrt{n}}$ converge et donc que $\sum_{n\geq 0} e^{-\sqrt{n}}$ converge (la nature d'une série ne dépend par d'un nombre fini de termes).
- On a $\frac{n+1}{(2n^2+1)(3n+1)} \sim \frac{1}{2n^2}$: or la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge donc par critère d'équivalence sur les séries de terme général positif, on peut affirmer que $\sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{(2n^2+1)(3n+1)}$ converge et donc que $\sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{(2n^2+1)(3n+1)}$ converge.

2. Prouver que la série suivante converge et déterminer sa somme : $\sum_{n\geq 0} n^2 e^{-n}$. On a

$$n^2e^{-n} = n^2\left(\frac{1}{e}\right)^n = n(n-1)\left(\frac{1}{e}\right)^n + n\left(\frac{1}{e}\right)^n = \left(\frac{1}{e}\right)^2\left(\underbrace{n(n-1)\left(\frac{1}{e}\right)^{n-2}}_{a_n}\right) + \frac{1}{e}\times\underbrace{n\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}}_{b_n}$$

Or $0 < \frac{1}{e} < 1$ donc a_n et b_n sont les termes généraux de séries géométriques dérivée convergentes (respectivement séries géométriques dérivée d'ordre 2 et d'ordre 1).
Par combinaison linéaire, n^2e^{-n} est le terme général d'une série convergente.
Sa somme est par ailleurs :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2e^{-n} = \left(\frac{1}{e}\right)^2\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{e}\right)^{n-2} + \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1} = \frac{1}{e^2}\times\frac{2}{\left(1-\frac{1}{e}\right)^3} + \frac{1}{e}\times\frac{1}{\left(1-\frac{1}{e}\right)^2}$$

CORRIGÉ EXERCICE 3

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à un vecteur $u = (x, y, z)$ associe le vecteur

$$f(u) = (-x-2y, x+2y, x+y+z)\ .$$

2. Déterminer une base de $Ker(f)$ puis une base de $Im(f)$.

- $f(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ x+y+z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow u = y(-2,1,1)$: $Ker(f) = vect\big((-2,1,1)\big)$.
- Le théorème du rang assure que f est de rang 2 ; comme les vecteurs $f(e_1)$ et $f(e_2)$ sont sont dans $Im(f)$ et ne sont pas colinéaires (cf matrice), on a

$$Im(f) = vect\big((-1,1,1)\,,(0,0,1)\,\big)\,.$$

3. Prouver que f est un projecteur et en déterminer les éléments caractéristiques. $A^2 = \cdots = A$ donc f est un projecteur. C'est le projecteur sur $Im(f) = vect\big((-1,1,1)\,,(0,0,1)\,\big)$ parallèlement à $Ker(f) = vect\big((-2,1,1)\big)$.

4. Prouver que $Ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^3$. C'est un résultat du cours puisque f est un projecteur ! Retrouvons-le :

- Soit $u \in Ker(f) \cap Im(f)$: $u \in Im(f)$ donc $\exists v \in E \mid u = f(v)$.
  Alors, comme $u \in Ker(f)$ on a $f(u) = 0$ et donc $f^2(v) = 0$.
  Mais comme f est un projecteur, $f^2(v) = f(v)$ et par conséquent $f(v) = u = 0$.
  On a donc bien $Ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$.

- Prouvons que $Ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^3$.
  Pour tout $u \in \mathbb{R}^3$: $u = \underbrace{u - f(u)}_{v} + \underbrace{f(u)}_{w}$: évidemment, $w \in Im(f)$.
  Vérifions que $v \in Ker(f)$: $f(v) = f(u) - f^2(u) = f(u) - f(u) = 0$.

On a donc bien décomposé tout élément de E en somme de deux éléments de $Ker(f)$ et de $Im(f)$.

5. Soit g le projecteur associé à f. Déterminer les coordonnées du vecteur $g(u)$ où $u = (x, y, z)$.

f et g étant deux projecteurs associés, on a $f + g = id$ donc $g = id - f$. Autrement dit,

$$g\big((x,y,z)\big) = (x,y,z) - (-x-2y, x+2y, x+y+z) = (2x+2y, -x-y, -x-y)$$

Remarque : on pourrait aussi passer par la matrice de g, donnée par $B = I - A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui correspond à l'égalité précédente.

CORRIGÉ EXERCICE 4

1. (a) $dimE = 4$.

   (b) • Soit $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

   $$f(\lambda P + Q) = -3X(\lambda P + Q) + X^2(\lambda P + Q)' = \lambda(-3XP + X^2P') + (-3XQ + X^2Q') = \lambda f(P) + f(Q),$$

   donc f est linéaire.
   • Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in E$. Alors

   $$f(P) = -3X(aX^3 + bX^2 + cX + d) + X^2(3aX^2 + 2bX + c) = -bX^3 - 2cX^2 - 3dX \in E,$$

   donc f est bien un endomorphisme de E.

   (c) On a $f(1) = -3X$, $f(X) = -2X^2$, $f(X^2) = -X^3$ et $f(X^3) = 0$, donc

   $$M = Mat_{(1,X,X^2,X^3)}(f) = Mat_{(1,X,X^2,X^3)}(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (d) • M est triangulaire inférieure avec des zéros sur la diagonale, donc non-inversible.
   • Comme M est triangulaire, ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale, donc $Sp(M) = \{0\}$.
   Si M était diagonalisable, il existerait alors P inversible telle que $M = P.(0I).P^{-1} = 0$... Or $M \neq 0$, donc M n'est pas diagonalisable.
   • On a

   $$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^4 = 0,$$

   et, par suite, pour tout $n \geq 4$, $M^n = M^4M^{n-4} = 0M^{n-4} = 0$.

   (e) $aX^3 + bX^2 + cX + d \in Kerf \Leftrightarrow f(aX^3 + bX^2 + cX + d) = 0 \Leftrightarrow -bX^3 - 2cX^2 - 3dX = 0 \Leftrightarrow b = c = d = 0$, donc $Kerf = \{aX^3, a \in \mathbb{R}\} = Vect(X^3)$.
   La famille (X^3) est libre (un seul polynôme, non nul) et génératrice de $kerf$, donc c'est une base de $kerf$, *qui est donc de dimension 1.*

   (f) $Imf = Vect(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)) = Vect(-3X, -2X^2, -X^3, 0) = Vect(X, X^2, X^3)$.

2. (a) Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $aP + bu(P) + cu^2(P) + du^3(P) = 0$. (*)
   Alors, en composant (*) par u^3, on obtient $au^3(P) + bu^4(P) + cu^5(P) + du^6(P) = 0$, c'est-à-dire $au^3(P) = 0$ (car $u^4 = 0$), et donc $a = 0$ (car $u^3(P) \neq 0$).
   Puis, en composant (*) cette fois par u^2, on obtient $bu^3(P) + cu^4(P) + du^5(P) = 0$, c'est-à-dire $bu^3(P) = 0$ et donc $b = 0$.
   Ensuite, en composant (*) cette fois par u, on obtient $cu^3(P) + du^4(P) = 0$, c'est-à-dire $cu^3(P) = 0$ et donc $c = 0$.
   Enfin, (*) est devenue $du^3(P) = 0$, et on a donc aussi $d = 0$.
   La famille $(P, u(P), u^2(P), u^3(P))$ est donc libre, et, comme elle est composée de 4 éléments dans un espace, E, de dimension 4, c'est une base de E.

   (b) • On a $g(P) = P + u(P) + u^2(P) + u^3(P)$, $g(u(P)) = u(P) + u^2(P) + u^3(P)$, $g(u^2(P)) = u^2(P) + u^3(P)$ et $g(u^3(P)) = u^3(P)$, donc

   $$T = Mat_{(P,u(P),u^2(P),u^3(P))}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Comme T est triangulaire inférieure sans zéro sur la diagonale, T est inversible, donc g est bijectif et, par suite, g est bien u automorphisme de E.
   • Via Gauss-Jordan (calculs sur la copie) ou en voyant T comme une matrice de changement de base, on obtient

   $$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = Id - Mat_{(P,u(P),u^2(P),u^3(P))}(u),$$

donc $g^{-1} = Id - u$.
Rq : on aurait pu procéder complètement autrement en remarquant que

$$g \circ (Id - u) = (Id + u + u^2 + u^3) \circ (Id - u) = Id + u + u^2 + u^3 - (u + u^2 + u^3 + u^4) = Id - u^4 = Id,$$

et donc directement que g est bijectif et $g^{-1} = Id - u$.

(c) Pour tout $Q \in keru$, on a $u(Q) = 0$, donc $(g - Id)(Q) = u(Q) + u^2(Q) + u^3(Q) = 0$, donc $Q \in ker(g - Id)$.
Par suite, on a $keru \subset ker(g - Id)$.
De plus, comme $Mat_{(P,u(P),u^2(P),u^3(P))}(g - Id) = T - I$ est de rang 3, $g - Id$ est de rang 3, donc d'après le théorème du rang, $dim(ker(g - Id)) = 4 - rg(g - Id) = 1$.
De même, comme $Mat_{(P,u(P),u^2(P),u^3(P))}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 3, u est de rang 3, donc d'après le théorème du rang, $dim(keru) = 4 - rg(u) = 1$.
Par suite, on a $dim(keru) = dim(ker(g - Id))$ (et $keru \subset ker(g - Id)$), donc

$$keru = ker(g - Id).$$