Devoir Maison N° 5

Fonctions Réelles

Exercice 1 — On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Partie I

1. a) Justifier que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. a) Étudier les variations de la fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $u(x) = (1-x)e^x - 1$ (*le calcul des limites à l'infini n'est pas demandé*).

b) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) < 0$.

c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ puis dresser le tableau de variation de f.

d) Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique en $-\infty$.

e) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Partie II

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = x$. On notera α la solution obtenue.

2. a) Établir : $\forall x \in [0, +\infty[,\ e^{2x} - 2x\, e^x - 1 \geq 0$.

b) Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[,\ f'(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{e^{2x} - 2x\, e^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$.

c) Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[,\ -\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0$.

d) Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

3. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}(1 - \alpha)$.

4. Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

5. Écrire un programme Scilab qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$.

Exercice 2 — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x^x$ si $x > 0$ et $f(0) = 1$.

1. Vérifier que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que f est continue (à droite) en 0. Est-elle dérivable (à droite) en 0 ?

3. Dresser le tableau de variation de f.

4. On note g la restriction de f à l'intervalle $I = [\frac{1}{e}, +\infty[$. Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.

5. Montrer qu'il existe une application $\varphi : J \to I$ telle que : $\forall x \in J,\ \varphi(x)^{\varphi(x)} = x$.

6. Démontrer que $\dfrac{\varphi(x)}{\ln x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

7. Déterminer l'ensemble K des points en lesquels φ est dérivable et montrer : $\forall x \in K,\ \varphi'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x(\varphi(x) + \ln x)}$.

8. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{T}_n$ la tangente à la courbe représentative de φ en n et u_n l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{T}_n$ avec l'axe des abscisses. Exprimer u_n en fonction de n et de $\varphi(n)$ puis montrer que $\dfrac{u_n}{-n\ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Exercice 1 — Partie I

1. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $e^x \neq 1$ donc f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur ces deux intervalles. De plus, pour $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2} = \dfrac{(1-x)e^x - 1}{(e^x-1)^2}$.

b) Sur $\mathbb{R}^*$, f est continue car dérivable. Par ailleurs, en 0, sachant que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$ on constate que $f(x) = \dfrac{x}{e^x-1} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 = f(0)$ de sorte que f est également continue en ce point.

2. a) u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = -xe^x$.

Donc $u'(x)$ est du signe de $-x$ et les variations de u sont données par le tableau ci-contre

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	
u		$\nearrow$	$u(0) = 0$	$\searrow$	

b) Pour $x \neq 0$, on a $f'(x) = \dfrac{u(x)}{(e^x-1)^2}$ de sorte que $f'(x)$ est du signe de $u(x)$, à savoir strictement négatif au vu du tableau ci-dessus.

c)

- En $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x - 1 = -1$ donc par quotient de limites $f(x) = \dfrac{x}{e^x-1} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- En $+\infty$: $f(x) = \dfrac{x}{e^x} \dfrac{1}{1-e^{-x}}$, donc par croissances comparées et produits des limites $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \times 1 = 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

d) On constate que $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{e^x-1} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -1$. Calculons la différence $f(x) - (-x) = f(x) + x = \dfrac{x}{e^x-1} + x = \dfrac{xe^x}{e^x-1}$. Aussi sait-on par croissances comparées que $xe^x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ donc, par quotient des limites, $f(x) - x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$.
Par conséquent la droite d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$.

e) *En plus de la courbe, est attendu le tracé : de l'asymptote en $-\infty$, de l'asymptote horizontale $y = 0$ en $+\infty$ (ou du moins pour cette dernière un tracé clair de la courbe qui traduit le fait que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$).*

Partie II

1. Pour $x \neq 0$, on a $f(x) = x \iff \dfrac{x}{e^x-1} = x \iff e^x - 1 = 1 \iff e^x = 2 \iff x = \ln 2$.
Par ailleurs $f(0) \neq 0$ de sorte que l'équation $f(x) = x$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution, $\alpha = \ln 2$.

2. a) Pour $x \in \mathbb{R}_+$, posons $g(x) = e^{2x} - 2xe^x - 1$. On sait que $g(0) = 0$ donc il suffit de prouver que g est croissante pour prouver qu'elle est positive sur $\mathbb{R}_+$.
Aussi la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x) = 2e^{2x} - 2e^x - 2xe^x = 2e^x(e^x - 1 - x)$ de sorte que $g'(x)$ est du signe de $e^x - 1 - x$.
Notant $h(x)$ cette dernière quantité, la fonction h ainsi définie est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a $h'(x) = e^x - 1 \geq 0$.
Par conséquent h est croissante sur $\mathbb{R}_+$ de sorte que pour tout $x \geq 0$, $h(x) \geq h(0) = 0$.
Ainsi g' est positive sur $\mathbb{R}_+$ et g est croissante ce qui, comme annoncé plus haut, achève donc la preuve.

b) Le résultat s'obtient par un simple calcul.

c) Le **2b)** de la partie I donne $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $]0, +\infty[$.
En outre la question précédente assure que, lorsque $x > 0$, $f'(x) + x$ est du signe de $e^{2x} - 2xe^x - 1$, quantité positive d'après **2a)** ce qui prouve que $f'(x) \geq -\frac{1}{2}$.

d) Par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de α on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \alpha = f(u_n) - f(\alpha)$. Appliquons l'inégalité des accroissements finis pour estimer cette différence :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on sait d'après la question précédente que $|f'(x)| = -f'(x) \leq \frac{1}{2}$.
- Le réel $\alpha = \ln 2$ est bien dans $\mathbb{R}_+$. Aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = f(u_{n-1}) > 0$ car $f > 0$ sur $\mathbb{R}$ et on a également $u_0 = 1 \in \mathbb{R}_+^*$.

L'inégalité des accroissements finis assure ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

3. Une récurrence immédiate assure : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|1 - \alpha|$.
Reste ensuite à prouver que $|1 - \alpha| = 1 - \alpha$ c'est à dire que $1 - \alpha \geq 0$, ce qui est bien le cas puisque $\alpha = \ln 2 < 1$.

4. Comme $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, $\frac{1}{2^n}(1-\alpha) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc, comme $0 \leq |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}(1-\alpha)$, on en déduit par encadrement que $|u_n - \alpha| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$: la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

5.
```
u=1;
n=0;
alpha=log(2);
    while (abs(u-alpha)>=1E-9)
        u=u/(exp(u)-1);
        n=n+1;
```

```
    end
disp(n,"Le premier entier tel que u_n < 10^(-9) est :")
```

Exercice 2 — **1.** Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f(x) = x^x = \exp(x\ln x)$. La fonction f est donc dérivable (et par conséquent continue) sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonction dérivables.

2. On sait par croissances comparées que $x\ln x \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ de sorte que par composition et continuité de l'exponentielle $f(x) = e^{x\ln x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} e^0 = 1 = f(0)$. Donc f est continue en 0.

Aussi, pour $x \in]0,1[$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{e^{x\ln x}-1}{x} = \ln x \dfrac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}$. Or on sait que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x} = \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{e^u-1}{u} = 1$ donc, par produit des limites en 0, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$. La fonction f n'est donc pas dérivable en 0 (tangente verticale).

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = (\ln x + 1)e^{x\ln x} = (\ln x+1)x^x$ donc $f'(x)$ est du signe de $\ln x + 1$:
$f'(x) > 0 \iff \ln x > -1 \iff x > e^{-1} = \frac{1}{e}$.
En outre, par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Enfin $f(e^{-1}) = (e^{-1})^{e^{-1}} = e^{-e^{-1}} = e^{-\frac{1}{e}}$.
Le tableau de variation figure ci-contre.

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$e^{-1/e}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. g est continue sur $I = [\frac{1}{e}, +\infty[$ et strictement croissante car $g'(\frac{1}{e}) = 0$ puis $g'(x) = f'(x) > 0$ pour tout $x > \frac{1}{e}$.
Ainsi, par le théorème de la bijection $g(I) = [g(\frac{1}{e}), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)[= [e^{-1/e}, +\infty[$ et g réalise une bijection de I sur $J = g(I)$.

5. On sait que pour tout $x \in J$, $x = g\circ g^{-1}(x) = g(g^{-1}(x)) = f(g^{-1}(x)) = (g^{-1}(x))^{g^{-1}(x)}$. L'application $\varphi = g^{-1}$ convient donc.

6. Pour $x \in J$, on a $\varphi(x)^{\varphi(x)} = x$ donc $\varphi(x)\ln(\varphi(x)) = \ln x$ et ainsi $\dfrac{\ln x}{\varphi(x)} = \ln(\varphi(x))$ ($\varphi(x) \neq 0$ car φ est à valeurs dans $[\frac{1}{e}, +\infty[$).
Par ailleurs, φ étant croissante, on a $[e^{-1/e}, +\infty[= \varphi(I) = [\varphi(e^{-1/e}), \lim\limits_{x\to+\infty}(\varphi(x))[$ et donc $+\infty = \lim\limits_{x\to+\infty}(\varphi(x))$.
Par suite $\dfrac{\ln x}{\varphi(x)} = \ln(\varphi(x)) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc $\dfrac{\varphi(x)}{\ln x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

7. Vu que g est dérivable sur I, pour tout point $y = g(x) \in J$, on sait d'après le cours que $\varphi = g^{-1}$ est dérivable en y si et seulement $g'(x) \neq 0$. Or pour tout $x \in I$, on a $g'(x) = 0 \iff f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{e}$. Par conséquent g' est dérivable en tout point $y \in J$ tel que $y \neq g(\frac{1}{e}) = e^{-1/e}$ de sorte que $K =]e^{-1/e}, +\infty[$.
Par ailleurs la formule de dérivation des fonctions réciproques donne, pour tout $y \in K$:
$\varphi'(y) = (g^{-1})'(y) = \dfrac{1}{g'(g^{-1}(y))} = \dfrac{1}{(1+\ln(\varphi(x)))\varphi(x)^{\varphi(x)}} = \dfrac{1}{(1+\ln(\varphi(x)))x}$ et, comme noté précédemment, $\ln(\varphi(x)) = \dfrac{\ln x}{\varphi(x)}$

8. L'équation de $\mathcal{T}_n$ s'écrit $y = \varphi(n) + \varphi'(n)(x-n)$ donc u_n est donné par $0 = \varphi(n) + \varphi'(n)(u_n - n)$ d'où $u_n = n - \dfrac{\varphi(n)}{\varphi'(n)}$. En utilisant l'expression de **7.** pour $\varphi'(n)$, il vient $u_n : n - n\varphi(n) - n\ln n$ et $\dfrac{u_n}{-n\ln n} = -\dfrac{1}{\ln n} + \dfrac{\varphi(n)}{\ln n} + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ (en utilisant **6.**).