

ROYAUME DU MAROC
LE MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE,
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
LE DÉPARTEMENT DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي
مركز التعليم العالي والبحث العلمي

Royaume du Maroc
Ministère de l'Éducation Nationale, de la Formation Professionnelle,
de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Département de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



المدرسة الوطنية للتجارة والتسيير - الجديدة
IRΦUXIXΦ XH+Θ%OX OXEXAX%O - ΘAXXC
ECOLE NATIONALE DE COMMERCE ET DE GESTION

جامعة شعيب الدكالي
جامعة شعيب الدكالي
Université Chouaib Doukkali

Concours National d'Accès aux Ecoles de Management

Présidence CNAEM 2020
Edition 2020

Epreuve : Mathématiques et Informatique

Filière : ECS

Durée : 4h

Note à lire par le candidat :

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde.

L'usage de la calculatrice est interdit.

Durée : 4 heures

* * * * *

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Remarques générales:

L'épreuve se compose trois problèmes indépendants.

* * * * *

Problème 1

On rappelle que $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre trois et $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices réelles à trois lignes et une colonne. Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} et $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E . Pour tous réels a et b , on considère l'endomorphisme $f_{(a,b)}$ de l'espace vectoriel E dont la matrice dans la base β est donnée par :

$$M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} 2a + 7b & -2b & 4b \\ 12b & 2a - 3b & 8b \\ -6b & 2b & 2a - 3b \end{pmatrix}$$

On pose $F = \{M_{(a,b)}; (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 \\ 12 & -3 & 8 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Partie 1**Diagonalisation de la matrice A**

1. a) Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
b) Vérifier que (I, A) est une base de F .
2. On considère les vecteurs de E dans la base β suivants : $e'_1 = (1, 2, -1)$, $e'_2 = (-1, 1, 2)$ et $e'_3 = (1, 1, -1)$.
a) Vérifier que e'_1 est un vecteur propre de l'endomorphisme $f_{(0,1)}$ associé à une valeur propre λ_1 que l'on précisera.
b) Vérifier que e'_2 et e'_3 sont deux vecteurs propres de l'endomorphisme $f_{(0,1)}$ associés à une valeur propre λ_2 que l'on précisera.
3. Posons $\beta' = (e'_1, e'_2, e'_3)$.
a) Vérifier que β' est une base de E .
b) Montrer que l'endomorphisme $f_{(0,1)}$ est diagonalisable.
c) Déterminer P la matrice de passage de la base β à la base β' .
d) Montrer qu'il existe une matrice diagonale notée D à préciser telle que $A = PDP^{-1}$.
4. a) Montrer que pour tous réels a et b , il existe une matrice diagonale notée $D_{(a,b)}$ à préciser telle $M_{(a,b)} = PD_{(a,b)}P^{-1}$.
b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $M_{(a,b)}$ soit inversible.
c) Montrer que, dans le cas où $M_{(a,b)}$ est inversible, $M_{(a,b)}^{-1} = PD_{(a',b')}P^{-1}$ où a' et b' sont à préciser en fonction de a et de b .
5. On pose, pour tout réel a , $M_a = M_{(a,a)}$ et $D_a = D_{(a,a)}$.
a) Déterminer pour tout entier naturel n , M_a^n en fonction de P , D_a et n , justifier votre réponse.

- b) i) Vérifier que $P^3 - P^2 - I = O$ et en déduire l'expression de la matrice P^{-1} .
 ii) En déduire pour tout entier naturel n , l'expression de M_a^n sous la forme d'un tableau en fonction de a et n .
 c) Déterminer, dans le cas où M_a est inversible, l'expression de M_a^{-1} sous la forme d'un tableau en fonction de a .

Partie 2

Application à un système de suites

On considère les suites $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ et $(z_n)_n$ qui sont définies par les conditions initiales $x_0 = 0$, $y_0 = 2$ et $z_0 = 3$ et pour tout entier naturel n ,

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{9}{4}x_n - \frac{1}{2}y_n + z_n + \frac{1}{4} \\ y_{n+1} = 3x_n - \frac{1}{4}y_n + 2z_n + \frac{3}{2} \\ z_{n+1} = -\frac{3}{2}x_n + \frac{1}{2}y_n - \frac{1}{4}z_n \end{cases}.$$

On pose $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n , $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

- Montrer que pour tout entier naturel n , il existe un réel a_0 à préciser, tel que $X_{n+1} = M_{a_0}X_n + B$.
- ~~Écrire un programme scilab qui affiche la matrice X_n , l'entier n étant donné par l'utilisateur.~~
- On se propose de trouver la matrice colonne U de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $U = M_{a_0}U + B$.
 - Vérifier que $I - M_{a_0} = M_{(\frac{1}{2}-a_0, -a_0)}$.
 - En déduire que la matrice $I - M_{a_0}$ est inversible et calculer son inverse.
 - En déduire la valeur de la matrice colonne U .
- Montrer que pour tout entier naturel n , $X_{n+1} - U = M_{a_0}(X_n - U)$.
 - En déduire par récurrence que pour tout entier naturel n , $X_n - U = (M_{a_0})^n(X_0 - U)$.
- Déterminer pour tout entier naturel n , les expressions de x_n , y_n et z_n , en fonction de n , (on utilisera l'expression de $(M_a)^n$ obtenue dans la question 5. b) ii) de la partie 1).
- Montrer que les suites $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ et $(z_n)_n$ sont convergentes et déterminer la limite de chacune.

Problème 2

Dans tout le problème, a désigne un réel strictement positif et f_a la fonction définie sur \mathbb{R} par,

$$f_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2x}{a} e^{-\frac{x^2}{a}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Partie 1

Étude d'une variable aléatoire à densité

- Montrer que f_a est une densité de probabilité.
Par la suite, on considère la variable aléatoire notée X_a admettant f_a comme densité.
- Déterminer la fonction de répartition F_{X_a} de la variable aléatoire X_a .
- On considère la suite $(u_k)_{k \geq 1}$ définie de la façon suivante, pour tout entier naturel non nul k ,
 $u_k = P\left(\sqrt{a \ln(k)} \leq X_a \leq \sqrt{a \ln(k+1)}\right)$.
 - Montrer que pour tout entier naturel non nul n , $\sum_{k=1}^n u_k = 1 - \frac{1}{n+1}$.