EL BILIA SUP

PREPAS - ECS 1

MATHS - MAMOUNI

DS 1

Logie - Sommes Produits

DUREE : 2h

EX ①

1) On pose $P : \forall x \geq 0, \exists y \in \mathbb{R}$ tq $x = y^2$

i) P est-elle vrai
Justifier votre reponce

ii) Donner $\overline{P}$

2) Mêmes questions pour
$Q : \exists x \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}$, on a $x = y^2$

EX ② :

1) Rappeler le principe de la contraposée

2) Soit $x, y \in \mathbb{R}$
Mq par contraposée, on a
$(xy \neq 1 \text{ et } x \neq y) \Rightarrow \dfrac{x}{x^2+x+1} \neq \dfrac{y}{y^2+y+1}$

Ex (3)

1) Montrer par recurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$$

2) On pose $S = \sum_{k=0}^{n} k$

i) Mq $S = \sum_{p=0}^{n} (n-p)$

ii) En deduire que $S = \sum_{k=0}^{n} (n-k)$

iii) En deduire que

$$2S = \sum_{k=0}^{n} n = n(n+1)$$

iii) " " $S = \frac{n(n+1)}{2}$

Mq $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$

Ex 4

1) Mq $j\binom{i}{j} = i\binom{i-1}{j-1}$ $1 \leq j \leq i$

2) En deduire que $\sum_{0 \leq j \leq i \leq n+1} j\binom{i}{j} = \sum_{i=0}^{n+1} i\, 2^{i-1}$

3) Simplifier $S = \sum_{i=0}^{n+1} i\, 2^{i-1}$

indication : $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

Ex 5

Soit $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$

1) Mq $\binom{n+p+1}{p} + \binom{n+p+1}{p+1} = \binom{n+p+2}{p+1}$

2) En deduire que par recurrence sur $n \in \mathbb{N}$, (p fixé)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k+p}{p} = \binom{n+p+1}{p+1}$$

Exercice 6 – Le but de cet exercice est de démontrer l'égalité suivante ***par deux méthodes*** : pour tout entier $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}. \qquad (\star)$$

1. Montrer l'égalité $(\star)$ par récurrence.
2. (a) Trouver trois réels a, b, c tels que pour tout entier $k \geq 1$,

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}.$$

   (b) Retrouver alors l'égalité $(\star)$.

Exercice 7 – On pose pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, (BONUS)

$$u_k = \frac{\sqrt{(k-1)!}}{\prod_{i=1}^{k}(1+\sqrt{i})}.$$

Le but de cet exercice est de démontrer l'égalité suivante ***par deux méthodes*** : pour tout entier $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = 1 - \frac{\sqrt{n!}}{\prod_{i=1}^{n}(1+\sqrt{i})}. \qquad (\star\star)$$

1. Démontrer l'égalité $(\star\star)$ pour $n = 1$.
2. ***Première méthode*** – Montrer l'égalité $(\star\star)$ par récurrence.
3. ***Deuxième méthode*** –
   (a) Montrer que, pour tout entier $k \geq 2$,

$$\left(1+\sqrt{k}\right) u_k = \sqrt{k-1} \cdot u_{k-1}. \qquad (\triangle)$$

   (b) Soit un entier $n \geq 2$. Sommer la relation $(\triangle)$ pour k allant de 2 à n, faire apparaître un télescopage et retrouver la relation $(\star\star)$.
   (c) Conclure soigneusement.

FIN

BONNE CHANCE

CORRIGÉ

EX. 1

1) i) P vrai car tout nbr ≥ 0 x s'écrit $x = (\sqrt{x})^2$ prendre $y = x^2$

ii) $\overline{P}$: $\exists x \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}$ tq $x \neq y^2$

2) i) Q fausse : impossible de trouver un $x \geq 0$ qui est carré de tous les reels y

ii) $\overline{Q}$: $\forall x \geq 0, \exists y \in \mathbb{R}$ tq $x \neq y^2$

EX 2

1) la contraposée de $P \Rightarrow Q$ est $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$

2) il faut Mq $\dfrac{x}{x^2+x+1} = \dfrac{y}{y^2+y+1} \Rightarrow x = y$

En effet

$$\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{y}{y^2+y+1} \Rightarrow x(y^2+y+1) = y(x^2+x+1)$$

$$\Rightarrow xy^2 + \cancel{xy} + x = yx^2 + \cancel{yx} + y$$

$$\Rightarrow xy^2 - yx^2 + x - y = 0$$

$$\Rightarrow xy(y-x) - (y-x) = 0$$

$$\Rightarrow (y-x)(xy-1) = 0$$

$$\Rightarrow y - x = 0 \text{ ou } xy - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = y \text{ ou } xy = 1$$

EX 3

1) Initialisation

pour $n=0$ $\sum_{k=0}^{0}(-1)^k k = 0 = (-1)^0 \frac{0\times(0+1)}{2}$

Hérédité : Supposons

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$$

donc $S_{n+1} = S_n +$ dernier terme de S_{n+1}

$$= (-1)^n \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+1}(n+1)^2$$

$$= (-1)^n (n+1)\left(\frac{n}{2} - (n+1)\right)$$

$$= (-1)^n (n+1)\frac{(n-2n-2)}{2}$$

$$= (-1)^n \frac{(n+1)(-n-2)}{2}$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \text{CQFD}$$

2) i) posons $k = n-p$

$p=0 \Rightarrow k=n$

$p=n \Rightarrow k=0$

donc $S = \sum_{k=n}^{0} k = \sum_{p=0}^{n}(n-p)$

ii) l'indice est muet

on change la notation de p en k

iii) $S = \sum_{k=0}^{n} k$ ①

$S = \sum_{k=0}^{n}(n-k)$ ②

① + ② $\Rightarrow$ $2S = \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n}(n-k)$

$$= \sum_{k=0}^{n}(k+n-k) = \sum_{k=0}^{n} n$$

iii) $2S = \sum_{n=0}^{n} n = n \sum_{n=0}^{n} 1 = n(n+1)$

donc $S = \frac{n(n+1)}{2}$

3) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2} = (-1)^n \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)$

EX 4

1) Voir demo en cours

2) $\sum_{0 \le j \le i \le n+1} j \binom{i}{j}$

$= \sum_{i=0}^{n+1} \left(\sum_{j=1}^{i} j \binom{i}{j} \right)$ ($j=0$ inutile)

$= \sum_{i=0}^{n+1} \left(\sum_{j=1}^{i} i \binom{i-1}{j-1} \right) = \sum_{i=0}^{n+1} i \left(\sum_{j=1}^{i} \binom{i-1}{j-1} \right)$

$= \sum_{i=0}^{n+1} i \left(\sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} \right)$

$= \sum_{i=0}^{n+1} i\, 2^{i-1}$

3) $\sum_{i=0}^{n+1} x^i = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$

on derive donc

$\sum_{i=0}^{n+1} i\, x^{i-1} = \frac{(1-x^{n+2})'(1-x) - (1-x^{n+2})(1-x)'}{(1-x)^2}$

$= \frac{-(n+2)x^{n+1}(1-x) + 1 - x^{n+2}}{(1-x)^2}$

pour $x = 2$

$S = (n+2)2^{n+1} + 1 - 2^{n+2}$

Exercice 6

1. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $\mathcal{A}(n)$:

$$\text{“} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}. \text{”}$$

Initialisation : On a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{1 \times 2 \times 3} = \frac{1}{6}$$

et

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2 \times 2 \times 3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

donc $\mathcal{A}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit un entier $n \geq 1$. Supposons que $\mathcal{A}(n)$ est vraie. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{n+3}{2(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{2}{2(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{n+1}{2(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+2)(n+3)}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{A}(n+1)$ est vraie.

Bilan : Pour tout entier $n \geq 1$, $\mathcal{A}(n)$ est vraie. On a bien montré l'égalité $(\star)$ par récurrence.

2. (a) Soient (a, b, c) trois réels. Alors, pour tout $k \geq 1$, on trouve après un petit calcul que

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2} = \frac{k^2(a+b+c) + k(3a+2b+c) + 2a}{k(k+1)(k+2)}.$$

Ainsi, pour que l'égalité cherchée soit vérifiée, il suffit que le système suivant soit vérifié :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a+b+c &=& 0 \\ 3a+2b+c &=& 0 \\ 2a &=& 1 \end{array} \right. .$$

Cela nous donne

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a &=& \frac{1}{2} \\ 2b+c &=& -\frac{3}{2} \\ b+c &=& -\frac{1}{2} \end{array} \right. \quad \text{i.e.} \quad a = \frac{1}{2}, \quad b = -1 \quad \text{et} \quad c = \frac{1}{2}.$$

On a donc montré que, pour tout entier $k \geq 1$, on a

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right).$$

(b) On obtient alors une *somme télescopique* :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - 2\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} + \sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} + \sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}.
\end{aligned}$$

On a donc bien retrouvé l'égalité $(\star)$.

Exercice 7

1. D'une part

$$\sum_{k=1}^{1} u_k = u_1 = \frac{\sqrt{0!}}{(1+\sqrt{1})} = \frac{1}{2}.$$

D'autre part

$$1 - \frac{\sqrt{1!}}{\prod_{i=1}^{1}(1+\sqrt{i})} = 1 - \frac{\sqrt{1!}}{1+\sqrt{1}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi l'égalité $(\star\star)$ est vraie pour $n = 1$.

2. ***Première méthode*** – Pour tout entier $n \geq 1$, posons $\mathcal{A}(n)$:

$$\text{“}\sum_{k=1}^{n} u_k = 1 - \frac{\sqrt{n!}}{\prod_{i=1}^{n}(1+\sqrt{i})}.\text{”}$$

Initialisation : D'après la question 1., la proposition $\mathcal{A}(1)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{A}(n)$ est vraie. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} u_k &= \sum_{k=1}^{n} u_k + u_{n+1} \\
&= 1 - \frac{\sqrt{n!}}{\prod_{i=1}^{n}(1+\sqrt{i})} + u_{n+1} \quad \text{selon } \mathcal{A}(n) \\
&= 1 - \frac{\sqrt{n!}}{\prod_{i=1}^{n}(1+\sqrt{i})} + \frac{\sqrt{n!}}{\prod_{i=1}^{n+1}(1+\sqrt{i})} \\
&= 1 - \frac{\sqrt{n!}(1+\sqrt{n+1})}{\prod_{i=1}^{n+1}(1+\sqrt{i})} + \frac{\sqrt{n!}}{\prod_{i=1}^{n+1}(1+\sqrt{i})} \\
&= 1 + \frac{\sqrt{n!} - \sqrt{n!}(1+\sqrt{n+1})}{\prod_{i=1}^{n+1}(1+\sqrt{i})} \\
&= 1 - \frac{\sqrt{n!}\cdot\sqrt{n+1}}{\prod_{i=1}^{n+1}(1+\sqrt{i})} \\
&= 1 - \frac{\sqrt{n!(n+1)}}{\prod_{i=1}^{n+1}(1+\sqrt{i})} \\
&= 1 - \frac{\sqrt{(n+1)!}}{\prod_{i=1}^{n+1}(1+\sqrt{i})}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{A}(n+1)$ est vraie.

Bilan : pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{A}(n)$ est vraie.

3. ***Deuxième méthode*** –

(a) Soit un entier $k \geq 2$. Alors

$$\begin{aligned}
\left(1+\sqrt{k}\right) u_k &= \left(1+\sqrt{k}\right) \cdot \frac{\sqrt{(k-1)!}}{\prod_{i=1}^{k}(1+\sqrt{i})} \\
&= \frac{\sqrt{(k-1)!}}{\prod_{i=1}^{k-1}(1+\sqrt{i})} \\
&= \frac{\sqrt{k-1}\sqrt{(k-2)!}}{\prod_{i=1}^{k-1}(1+\sqrt{i})} \\
&= \sqrt{k-1} \cdot u_{k-1}\,.
\end{aligned}$$

Remarque : comme $k \geq 2$ alors $k-1 \geq 1$ et donc u_{k-1} est bien défini.

(b) Soit un entier $n \geq 2$. Sommons la relation $(\triangle)$ pour k allant de 2 à n. On obtient alors

$$\sum_{k=2}^{n}(1+\sqrt{k})u_k = \sum_{k=2}^{n}\sqrt{k-1} \cdot u_{k-1}$$

i.e., en développant à gauche et en faisant le changement d'indice $[j = k-1]$ à droite

$$\sum_{k=2}^{n} u_k + \sum_{k=2}^{n}\sqrt{k} \cdot u_k = \sum_{j=1}^{n-1}\sqrt{j} \cdot u_j.$$

On obtient donc

$$\sum_{k=2}^{n} u_k = \sum_{j=1}^{n-1}\sqrt{j} \cdot u_j - \sum_{k=2}^{n}\sqrt{k} \cdot u_k = \sqrt{1} \cdot u_1 - \sqrt{n} \cdot u_n = u_1 - \sqrt{n} \cdot u_n\,.$$

Ainsi

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + \sum_{k=2}^{n} u_k = 2u_1 - \sqrt{n} \cdot u_n = 1 - \frac{\sqrt{n!}}{\prod_{i=1}^{n}(1+\sqrt{i})}.$$

(c) On a donc montré que, pour tout entier $n \geq 2$, la relation $(\star\star)$ est vraie. Comme elle est vraie aussi pour $n = 1$ d'après la première question, alors elle est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.