Concours Blanc N° 1

Suites Numériques Fonctions Réelles

Calculatrices et Documents Interdits

Exercice 1 – Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble des fonctions $f :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ admettant une limite finie en $+\infty$ et vérifiant

$$\forall x \in]-1,+\infty[\,, \quad f(3x+2) = f(x)\,. \qquad (\star)$$

1. ***Analyse :*** Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant une limite finie en $+\infty$ (que l'on note α) et vérifiant la relation $(\star)$.

   (a) Vérifier que : $\forall x \in]-1,+\infty[$, $3x+2 \in]-1,+\infty[$.

   (b) Soit un réel $y \in]-1,+\infty[$.
   On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par $u_0 = y$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 2$.

   i. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n.

   ii. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

   iii. Ecrire un programme en langage SCILAB demandant à l'utilisateur de choisir une valeur de y et permettant de calculer le plus petit entier n_0 tel que $u_{n_0} \geq 10000$.

   iv. Montrer que la suite $(f(u_n))_{n\geq 0}$ est constante.

   v. En déduire que $f(y) = \alpha$.

   (c) Montrer que f est une fonction constante.

2. ***Synthèse :*** conclure.

Exercice 2 On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 4}{u_n + 5}$.

1. Montrer que :
$$\forall x \in \,]-2, +\infty[\,, \quad \frac{x-4}{x+5} > -2\,.$$
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n > -2$.

On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_n + 2}$.

3. Justifier que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est correctement définie.
4. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est arithmétique.
5. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_n en fonction de n.
6. Déterminer enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 3 Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ vérifiant la relation suivante
$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2\,, \quad f(x)f(y) = \sqrt{y}f(2x) + \sqrt{x}f(2y). \qquad (\star\star)$$

1. Dans toute cette question, on considère f une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ vérifiant la relation $(\star\star)$.
   (a) Vérifier que $f(0) = 0$.
   (b) Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x)^2 = 2\sqrt{x}f(2x)$.
   (c) En déduire que, pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,
   $$f(x)f(y) = \frac{1}{2\sqrt{xy}}\left[y(f(x))^2 + x(f(y))^2\right].$$
   (d) Vérifier alors que, pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,
   $$\left(\sqrt{y}f(x) - \sqrt{x}f(y)\right)^2 = 0.$$
   (e) En déduire que la fonction $g : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \frac{f(x)}{\sqrt{x}}$ est constante.
   (f) Montrer alors que f est la fonction nulle ou la fonction $x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto 2\sqrt{2x}$.
2. Conclure.

Exercice 4

On considère l'application f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=(x+\ln x)\,e^{x-1}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et déterminer pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)$.
2. Établir : $\forall x\in]0,+\infty[,\quad \ln x+\frac{1}{x}>0$.
3. Dresser le tableau de variations complet de f.

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=2$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)=(u_n+\ln(u_n))e^{u_n-1}$.

4. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\geq 2$.
5. Montrer alors que : $\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad u_n\geq e^n$.
   Qu'en déduit-on sur la limite de la suite ?

Problème 1

Partie I

Soit g la fonction définie pour tout $x\in]1,+\infty[$ par $g(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)-x$.

1. (a) Vérifier que g est bien définie sur $]1,+\infty[$.
   (b) Trouver les limites de g en 1 et en $+\infty$.
   (c) Etudier le signe de $\ln(\frac{x+1}{x-1})$ pour $x\in]1,+\infty[$.
   (d) En déduire la position relative de la courbe de g et de la droite d'équation $y=-x$ sur $]1,+\infty[$.
   (e) *Définition :* On dit que la droite d'équation $y=ax+b$ est asymptote à la courbe de g au voisinage de $+\infty$, si $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)-(ax+b)]=0$.
   Montrer que la droite d'équation $y=-x$ est asymptote à la courbe de g au voisinage de $+\infty$.
2. (a) Justifier que g est dérivable sur $]1,+\infty[$, puis montrer que pour tout $x\in]1,+\infty[$, $g'(x)=\frac{-1-x^2}{(x-1)(x+1)}$.
   (b) En déduire le tableau de variations complet de g sur $]1,+\infty[$.
   (c) Montrer que g s'annule en un unique point que l'on notera α. Vérifier que $\alpha\leq 2$.
   (d) En déduire le signe de g sur $]1,+\infty[$.
3. Dans un repère orthonormé, dessiner la droite d'équation $y=-x$ ainsi que l'allure de g, en tenant compte des questions 1.(d) et 1.(e).

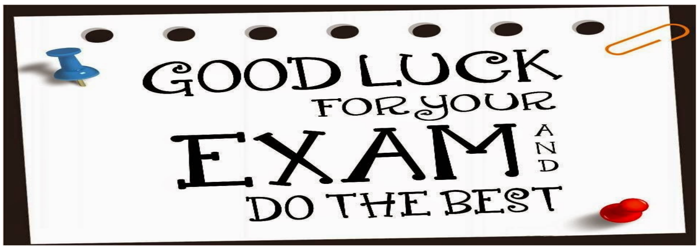
Partie II

Soit la fonction f définie par $f(x)=(1-x^2)\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

4. (a) Déterminer l'ensemble de définition I de f.
   (b) Déterminer la parité de f. Qu'en déduit-on graphiquement ?
5. (a) Justifier que f est dérivable sur I et calculer f' sur I.
   (b) Montrer que $\forall x\in]0,1[$, $f'(x)=-2x\times g\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   (c) En déduire le signe de f' sur $]0,1[$.
   (d) Donner le tableau de variations de f sur [0,1[, puis sur I. On admettra que $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$.
6. Calculer la limite à gauche en 1 de $\frac{f(x)}{x-1}$.
7. Déterminer tous les points en lesquels la courbe de f admet une tangente horizontale.
8. Dessiner alors l'allure de f sur tout son ensemble de définition, dans un repère orthonormé.

Problème 2 Soit $f :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ définie par $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$. On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Ecrire un programme Scilab qui demande à l'utilisateur de choisir un n et qui renvoie la valeur de u_n.
2. Tracer les premiers termes de la suite sur un graphique pour conjecturer son comportement asymptotique.
3. Dresser le tableau de variations de f sur $[1,3]$. En déduire que : $f([1,3]) \subset [1,3]$, c'est à dire que : $\forall x \in [1,3]$, $f(x) \in [1,3]$.
4. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \in [1,3]$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_{2n}$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = g(v_n)$ où $g = f \circ f$.
   (b) Déterminer v_0 et v_1. En déduire que $v_0 \leq v_1$.
   (c) Montrer que (v_n) est croissante.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = u_{2n+1}$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = g(w_n)$ où $g = f \circ f$.
   (b) Etudier la monotonie de (w_n).
7. En déduire que (v_n) et (w_n) sont convergentes.
8. Déterminer l'expression de $g(x)$ pour tout $x \in [1,3]$. En déduire les points fixes de g sur cet intervalle.
9. Déterminer les limites respectives de (v_n) et (w_n).
10. Conclure.



CORRIGE

Problème 2

1. On pouvait proposer le programme suivante :

```
u=1
n=input('Entrer une valeur pour n:')
for k=1:n
    u=1+2/u
end
disp(u)
```

2. On conjecture que la suite converge vers 2 sans monotonie.

3. La fonction f est dérivable sur $[1,3]$ comme somme de fonctions usuelles sur cet intervalle et pour tout $x \in [1,3]$, on a :

$$f'(x) = \frac{-2}{x^2} < 0.$$

Ainsi, f est strictement décroissante sur $[1,3]$. Comme de plus $f(1) = 3$ et $f(3) = \frac{5}{3}$, et f est continue sur $[1,3]$, on a le tableau de variations suivant.

x	1		3
f	3	$\searrow$	$\frac{5}{3}$

Ainsi, comme $\frac{5}{3} > 1$, on a bien $f([1,3]) \subset [1,3]$.

Conclusion : $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } [1,3] \text{ et l'intervalle } [1,3] \text{ est stable par } f.}$

4. Raisonnons par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: u_n est bien défini et $u_n \in [1,3]$.
Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ d'après l'énoncé donc u_0 existe et $u_0 \in [1,3]$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons qu'alors, $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi. On sait donc que u_n existe et que $u_n \in [1,3]$. Comme f est définie sur $]0,+\infty[$ et $[1,3] \subset]0,+\infty[$, $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie. Par ailleurs, comme, d'après la question précédente, $f([1,3]) \subset [1,3]$ et d'après l'hypothèse de récurrence, $u_n \in [1,3]$, on a bien $u_{n+1} = f(u_n) \in [1,3]$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\boxed{\text{D'après le principe de récurrence, on a démontré que } \mathcal{P}(n) \text{ est vraie pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1} = u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = f \circ f(v_n) = g(v_n).$$

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = g(v_n).}$

(b) On a $v_0 = u_0 = 1$ et $v_1 = u_2 = f(f(1)) = f(3) = \frac{5}{3}$.

Conclusion : $\boxed{v_0 = 1 \leq \frac{5}{3} = v_1.}$

(c) Raisonnons par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n) : v_n \leq v_{n+1}$.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a bien $v_0 \leq v_1$ d'après la question précédente. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après l'hypothèse de récurrence, on a donc $v_n \leq v_{n+1}$. Appliquons alors deux fois la fonction f qui est décroissante d'après la question 2. Il vient alors $f(v_n) \geq f(v_{n+1})$ puis $f(f(v_n)) \leq f(f(v_{n+1}))$ c'est à dire, $g(v_n) \leq g(v_{n+1})$ ou, d'après la question 4.a., $v_{n+1} \leq v_{n+2}$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\boxed{\text{D'après le principe de récurrence, nous avons démontré que } \mathcal{P}(n) \text{ est vraie pour tout } n \in \mathbb{N}. \text{ Donc } (v_n) \text{ est croissante.}}$

6. (a) Même raisonnement qu'à la question 4.a.

   (b) On suit le raisonnement des questions 4.b et 4.c. D'abord $w_0 = u_1 = f(1) = 3$ et $w_1 = u_3 = f(u_2) = \frac{11}{5}$. Ainsi, $w_0 \geq w_1$. On démontre alors par récurrence, comme à la question 4.c. que (w_n) est décroissante.

   Conclusion : $\boxed{\text{La suite } (w_n) \text{ est décroissante.}}$

7. La suite (v_n) est croissante et d'après la question 3. elle est majorée par 3. Ainsi, d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers une limite ℓ. De même, la suite (w_n) est décroissante et d'après la question 3. elle est minorée par 1 donc, d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel ℓ'.

8. Soit $x \in [1,3]$. $g(x) = f(f(x)) = 1 + \frac{2}{f(x)} = 1 + \frac{2}{1+\frac{2}{x}} = \frac{3x+2}{x+2}$.

   Cherchons alors les points fixes de g sur $[1,3]$. Soit $x \in [1,3]$.

$$g(x) = x \iff \frac{3x+2}{x+2} = x \iff 3x+2 = x(x+2) \iff x^2 - x - 2 = 0 \iff (x+1)(x-2) = 0.$$

   Conclusion : $\boxed{g \text{ a un unique point fixe sur } [1,3] \text{ qui est } x = 2.}$

9. Comme la fonction g est continue sur $[1,3]$ (composée de fonctions continues sur cet intervalle), les questions 4.a et 5.a permettent de conclure, grâce au théorème de point fixe, que ℓ et ℓ' sont des points fixes de g sur $[1,3]$. Donc $\ell = \ell' = 2$.

   Conclusion : $\boxed{(v_n) \text{ et } (w_n) \text{ convergent vers } 2.}$

10. Nous avons démontré, dans les questions précédentes, que $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite. Ainsi, d'après le théorème des deux suites extraites, $(u_n)_n$ converge vers cette même limite.

    Conclusion : $\boxed{\text{La suite } (u_n)_n \text{ converge vers } 2.}$

Exercice 2

1. Soit $x \in]-2,+\infty[$. Alors

$$\frac{x-4}{x+5}+2=\frac{x-4+2(x+5)}{x+5}=\frac{3x+6}{x+5}.$$

Or $x>-2$ donc $3x+6=3(x+2)>0$ et $x+5>3>0$ donc

$$\frac{x-4}{x+5}+2>0 \quad \text{i.e.} \quad \frac{x-4}{x+5}>-2.$$

2. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}(n)$: « u_n est bien défini et $u_n>-2$ ».
Initialisation : $u_0=1$ donc u_0 est bien défini et $u_0>-2$. Ainsi $\mathcal{A}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{A}(n)$ est vraie.
Alors u_n est bien défini et $u_n>-2$. Autrement dit $u_n \in]-2,+\infty[$.
Ainsi $u_n+5 \neq 0$ et donc u_{n+1} est bien défini. De plus, d'après la question précédente,

$$u_{n+1}=\frac{u_n-4}{u_n+5}>-2.$$

Donc $\mathcal{A}(n+1)$ est vraie.
Bilan : d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}(n)$ est vraie.

3. Pour tout entier n, $u_n>-2$ et donc $u_n+2 \neq 0$ donc v_n est bien défini.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}+2}-\frac{1}{u_n+2}=\frac{1}{\frac{u_n-4}{u_n+5}+2}-\frac{1}{u_n+2}=\frac{u_n+5}{u_n-4+2(u_n+5)}-\frac{1}{u_n+2}.$$

Ainsi

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+5}{3u_n+6}-\frac{3}{3u_n+6}=\frac{u_n+2}{3u_n+6}=\frac{1}{3}.$$

On a ainsi montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1}=v_n+\frac{1}{3}.$$

La suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est donc arithmétique de raison $\frac{1}{3}$.

Exercice 3

1. (a) D'après $(\star\star)$ utilisée avec $x = y = 0$, on obtient
$$f(0)f(0) = 0 \quad \text{i.e.} \quad f(0)^2 = 0 \quad \text{i.e.} \quad f(0) = 0\,.$$

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. D'après $(\star\star)$ utilisée avec $y = x$, on a
$$f(x)^2 = \sqrt{x}f(2x) + \sqrt{x}f(2x) = 2\sqrt{x}f(2x)\,.$$
Et ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

   (c) Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Alors d'après la question précédente
$$f(x)^2 = 2\sqrt{x}f(2x) \quad \text{et} \quad f(y)^2 = 2\sqrt{y}f(2y)$$
ce qui nous donne, comme $\sqrt{x} \neq 0$ et $\sqrt{y} \neq 0$,
$$f(2x) = \frac{f(x)^2}{2\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad f(2y) = \frac{f(y)^2}{2\sqrt{y}}.$$
En réinjectant dans $(\star\star)$, on obtient
$$f(x)f(y) = \sqrt{y}\cdot\frac{f(x)^2}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\cdot\frac{f(y)^2}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{xy}}\left(yf(x)^2 + xf(y)^2\right).$$

   (d) Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Alors
$$\begin{aligned}\left(\sqrt{y}f(x) - \sqrt{x}f(y)\right)^2 &= yf(x)^2 + xf(y)^2 - 2\sqrt{xy}f(x)f(y)\\ &= 2\sqrt{xy}\left(\frac{1}{2\sqrt{xy}}\left(yf(x)^2 + xf(y)^2\right) - f(x)f(y)\right)\\ &= 0,\end{aligned}$$
d'après la question précédente.

(e) Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. D'après la question 1.(d),
$$\sqrt{y}f(x) - \sqrt{x}f(y) = 0 \quad \text{i.e.} \quad \sqrt{y}f(x) = \sqrt{x}f(y).$$
Comme x et y sont strictement postifs, on peut diviser par $\sqrt{xy}$ cette dernière égalité, et l'on obtient
$$\frac{f(x)}{\sqrt{x}} = \frac{f(y)}{\sqrt{y}}.$$
Ceci étant vrai pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on en déduit que la fonction g est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

(f) *Cette dernière question est plus difficile car c'est à vous de prendre quelques initiatives.*
Première étape : Comme la fonction g est constante sur $\mathbb{R}_+^*$, alors il existe un réel α tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = \alpha$. Ainsi
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \,, \quad f(x) = \alpha\sqrt{x}.$$
Comme $f(0) = 0 = \alpha \cdot \sqrt{0}$, alors on peut finalement écrire que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \,, \quad f(x) = \alpha\sqrt{x}.$$
Deuxième étape : Nous allons ensuite réinjecter ce résultat dans l'égalité $(\star\star)$. On obtient, pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$,
$$\alpha\sqrt{x} \cdot \alpha\sqrt{y} = \sqrt{y} \cdot \alpha\sqrt{2x} + \sqrt{x} \cdot \alpha\sqrt{2y}$$
i.e.
$$\alpha^2\sqrt{xy} = 2\alpha\sqrt{2xy}.$$
Comme ceci est vrai pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, alors en particulier pour $x = y = 1$, cela donne
$$\alpha^2 = 2\alpha\sqrt{2} \quad \text{i.e.} \quad \alpha(\alpha - 2\sqrt{2}) = 0.$$
Ainsi $\alpha = 0$ ou $\alpha = 2\sqrt{2}$.
Finalement f est donc bien la fonction nulle ou la fonction $x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto 2\sqrt{2x}$.

2. La fonction nulle est bien sûr solution du problème.
Posons $f : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto 2\sqrt{2x}$. Alors, pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$,
$$\sqrt{y}f(2x) + \sqrt{x}f(2y) = \sqrt{y} \cdot 2\sqrt{4x} + \sqrt{x} \cdot 2\sqrt{4y} = 4\sqrt{4xy} = 8\sqrt{xy} = 2\sqrt{2x} \cdot 2\sqrt{2y}.$$
Donc f est bien solution du problème.
Bilan : ce problème admet donc exactement deux solutions, la fonction $x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto 2\sqrt{2x}$ et la fonction nulle.

Exercice 1 –

1. ***Analyse :***

   (a) Pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $3(x+1) > 0$ i.e. $3x+2 > -1$.

   (b) i. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est arithmético-géométrique.
   Soit le réel c tel que $3c+2 = c$ i.e. $c = -1$.
   Alors la suite $(u_n+1)_{n\geq 0}$ est géométrique de raison 3.
   Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n + 1 = 3^n(u_0+1)$. Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n(y+1)-1$.

   ii. Comme $y > -1$ alors $y+1 > 0$. De plus $3^n \longrightarrow +\infty$ (car $3 > 1$).
   Ainsi par opération $u_n \longrightarrow +\infty$.

   iii. *On peut utiliser ou non l'expression de u_n en fonction de n.*
   Premier programme :

```
k = 0
u = input('entrer une valeur de y :')
while u < 10000
   k = k+1
   u = 3*u+2
end
disp(k,'n0 = ')
```

   Deuxième programme :

```
k = 0
y = input('entrer une valeur de y :')
while (y+1)*3^k-1 < 10000
   k = k+1
end
disp(k,'n0 = ')
```

   iv. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $y > -1$ alors $3^n(y+1) > 0$ et donc $u_n > -1$ i.e. $u_n \in]-1,+\infty[$.
   Ainsi d'après la relation $(\star)$ alors

$$f(u_{n+1}) = f(3u_n+2) = f(u_n).$$

   Donc la suite $(f(u_n))_{n\geq 0}$ est constante.

   v. La suite $(f(u_n))_{n\geq 0}$ est constante donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = f(u_0) = f(y)$.
   Ainsi

$$f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(y).$$

   De plus $u_n \longrightarrow +\infty$ et f admet α comme limite en $+\infty$ donc par composition de limite

$$f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha.$$

   Donc par unicité de la limite $f(y) = \alpha$.

   (c) On a donc montré que $f(y) = \alpha$, et ceci pour tout réel $y \in]-1,+\infty[$.
   Donc f est la fonction constante égale à α.

2. ***Synthèse :*** Dans l'analyse on a montré que si f est solution du problème, alors f est constante.
   Supposons maintenant que f est constante, alors f vérifie $(\star)$ et admet une limite finie en $+\infty$.
   Donc l'ensemble cherché est l'ensemble des fonctions constantes.

Exercice 4

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions usuelles dérivables et $f'(x) = (1+\frac{1}{x})e^{x-1} + (x+\ln x)e^{x-1} = (1+x+\frac{1}{x}+\ln x)e^{x-1}$.
2. On pose pour tout $x>0$, $g(x) = \ln x + \frac{1}{x}$. Alors g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$. Donc (TV), g admet un minimum en $x=1$ de valeur $g(1)=1$. D'où $\forall x>0$, $g(x)\geq 1>0$.
3. Comme pour $x>0$, $1+x>0$, on déduit de 2. que $\forall x>0$, $1+x+\frac{1}{x}+\ln x>0$ d'où $f'(x)>0$. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Limite en 0 : $\lim\limits_{x\to 0} \ln x + x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} e^{x-1} = e^{-1}$
d'où par produit, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$. Asymptote verticale d'équation $x=0$. Limite en $+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
4. Par récurrence : *cas n=0* : $u_0 = 2 \geq 2$.
Supposons que pour un certain $n\in\mathbb{N}$ fixé, $u_n\geq 2$. Montrons que pour ce n $u_{n+1}\geq 2$.
Or $u_{n+1} = f(u_n)$ et f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Donc $u_n\geq 2 \Rightarrow f(u_n)\geq f(2) \Rightarrow u_{n+1} \geq (2+\ln(2))e^1 \geq 2$ car $2+\ln 2\geq 2$ et $e\geq 1$ donc par produit (tout est positif), $(2+\ln 2)e \geq 2*1 = 2$.
Ou sans la monotonie de f, par construction : $u_n\geq 2 \Rightarrow \ln(u_n)\ln(2)$ par croissance de ln sur ${}_RRps$, d'où par somme $u_n+\ln(u_n)\geq 2+\ln(2)\geq 2$. De plus, $u_n\geq 2\Rightarrow u_n-1\geq 1\geq 0$ d'où par croissance de l'exponentielle, $e^{u_n-1}\geq e^0 = 1$, et enfin par produit (tout est positif), $(u_n+\ln(u_n))e^{u_n-1}\geq 2\times 1 = 2$. *Conclure.*
5. *cas n=0* : $u_0 = 2\geq 1 = e^0$.
Supposons que pour un certain n, $u_n\geq e^n$. Montrons que pour ce n, $u_{n+1}\geq e^{n+1} = e^n\times e$.
Si on raisonne comme précédemment : f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $u_n\geq e^n \Rightarrow f(u_n)\geq f(e^n)$.
Or $f(u_n) = u_{n+1}$, et $f(e^n) = (e^n+\ln(e^n))e^{e^n-1} = (e^n+n)e^{e^n-1}$. On a $e^n+n\geq e^n$, et on veut $e^{e^n-1}\geq e$ pour pouvoir conclure . Problème car $e^n-1\geq 1$ pour $n\geq 1$ mais pas à partir de $n=0$!
Donc soit on initialise en $n=0$ et $n=1$ pour supposer dans l'hérédité $n\geq 1$, soit on change de méthode ! Deuxième option, on revient en arrière : on a $u_{n+1} = f(u_n) = (u_n+\ln(u_n))e^{u_n-1}\geq (u_n+\ln 2)e^1$ car $u_n\geq 2$ par la question précédente. Puis on utilise l'hypothèse de récurrence, $u_n\geq e^n$ d'où $u_n+\ln 2\geq e^n+\ln 2\geq e^n$ et enfin, $u_{n+1}\geq e^n\times e^1 = e^{n+1}$.
Conclure.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$, on en déduit par comparaison : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Problème 1

Partie 1

1. (a) Inutile de regarder tout l'ensemble de définition "possible" de la fonction g. Il suffit de montrer que si $x \in]1,+\infty[$, alors $g(x)$ existe bien.
Soit $x \in]1,+\infty[$. Alors $x+1>0$ et $x-1>0$ donc $\frac{x+1}{x-1}>0$ et $g(x)$ existe.
   (b) A droite en 1 : $\lim\limits_{x\to 1^+} x-1=0^+$ d'où $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x-1}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=+\infty$. Asymptote verticale d'équation $x=1$.
En $+\infty$, on factorise par x : $g(x)=\ln(\frac{x(1+1/x)}{x(1-1/x)})-x=\ln(\frac{1+1/x}{1-1/x})-x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
   (c) On a $\ln(X)\geq 0 \Leftrightarrow X\geq 1$. Soit $x\in]1,+\infty[$. Alors $\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-1+2}{x-1}=\frac{x-1}{x-1}+\frac{2}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}>1$ puisque $x>1$. (Ou sinon résoudre l'inéquation : $\frac{x+1}{x-1}\geq 1 \Leftrightarrow x+1\geq x-1$ [puisque $x>1$ donc $x-1>0$] $\Leftrightarrow 2\geq 0$ toujours vrai). Conclure : $\forall x\in]1,+\infty[$, $\frac{x+1}{x-1}>1$ donc $\ln(\frac{x+1}{x-1})>0$.
   (d) Pour $x\in]1,+\infty[$, $g(x)-(-x)=g(x)+x=\ln(\frac{x+1}{x-1})>0$ d'après(c) donc la courbe de g sera au-dessus de la droite d'équation $y=-x$ sur $]1,+\infty[$.
   (e) D'après la factorisation faite au (b), $g(x)-(-x)=\ln(\frac{x+1}{x-1})=\ln(\frac{1+1/x}{1-1/x}) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. (a) g est dérivable sur $]1,+\infty[$ comme somme, composée et quotient de fonctions usuelles dérivables sur leur ensemble de définition, dont le dénominateur ne s'annule pas. Et pour $x\in]1,+\infty[$,
$g(x)=\ln(x+1)-\ln(x-1)-x$ d'où $g'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}-1=\frac{-1-x^2}{(x+1)(x-1)}$ (sans l'astuce de séparer le ln, c'est bien sûr possible de trouver la dérivée, mais le calcul est plus difficile !)
   (b) $\forall x\in]1,+\infty[$, $-1-x^2\leq -1<0$ et $(x+1)(x-1)>0$ donc $g'(x)<0$.
   (c) g est continue et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$: En 1, g tend vers $+\infty$, et en $+\infty$ elle tend vers $-\infty$. Comme $0\in]-\infty,+\infty[$, g prend une et une seule fois la valeur 0. Or $g(2)=\ln(3)-2\leq \ln(e^2)-2=0$ donc $g(2)\leq g(\alpha)$, et par stricte décroissance de g, on en déduit $\alpha\leq 2$.
   (d) g est donc positive sur $]1,\alpha]$ et négative sur $[\alpha,+\infty[$.

Partie 2

4. (a) $I=\{x\in\mathbb{R}\,|\,1-x\neq 0 \text{ et } \frac{1+x}{1-x}>0\}=]-1,1[$ (faire un tableau de signe pour le quotient)
   (b) $\forall x\in]-1,1[$, on a $-x\in]-1,1[$ et $f(-x)=(1-(-x)^2)\ln(\frac{1-x}{1+x})=(1-x^2)\ln(\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}})=-(1-x^2)\ln(\frac{1+x}{1-x})=-f(x)$.
Donc la fonction f est impaire et sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.
5. (a) Même phrase blabla pour la dérivabilité de f que pour celle de g. On peut également utiliser la même astuce (séparer le ln) pour simplifier le calcul : $\forall x\in]-1,1[$, $1+x>0$ et $1-x>0$ d'où $f(x)=(1-x^2)[\ln(1+x)-\ln(1-x)]$ et
$f'(x)=-2x\ln(\frac{1+x}{1-x})+(1-x^2)[\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}]=-2x\ln(\frac{1+x}{1-x})+2$ (car $(1-x)(1+x)=1-x^2$).
   (b) D'où pour $x\in]0,1[$, $f'(x)=-2x[\ln(\frac{1+x}{1-x})-\frac{1}{x}]$. Or pour $x\in]0,1[$, $\frac{1}{x}\in]1,+\infty[$ et
$g(\frac{1}{x})=\ln(\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1})-\frac{1}{x}=\ln(\frac{\frac{1+x}{x}}{\frac{1-x}{x}})-\frac{1}{x}=\ln(\frac{1+x}{1-x})-\frac{1}{x}$.
   (c) Il faut le signe de $g(\frac{1}{x})$ pour $x\in]0,1[$: si $x\in]0,\frac{1}{\alpha}[$, alors $\frac{1}{x}\in]\alpha,+\infty[$ et donc $g(\frac{1}{x})<0$ d'où $f'(x)>0$. C'est le contraire si $x\in]\frac{1}{\alpha},1[$.
   (d) $f(0)=0$, f admet un maximum en $\frac{1}{\alpha}$ et on construit l'autre moitié du TV par symétrie.
6. $(1-x^2)=(1-x)(1+x)=-(x-1)(1+x)$ d'où $\frac{f(x)}{x-1}=-(1+x)\ln(\frac{1+x}{1-x})$, et $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{x-1}=-\infty$.
7. L'équation de la tangente au point a est : $y=(x-a)f'(x)+f(a)$. Donc la tangente au point a est horizontale ssi $f'(a)=0$. Il reste donc à résoudre l'équation $f'(x)=0$ sur I.
Or $\forall x\in]0,1[$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow g(1/x)=0$ (car $x\neq 0$) $\Leftrightarrow \frac{1}{x}=\alpha \Leftrightarrow x=\frac{1}{\alpha}$. Par symétrie (imparité), on obtient que l'unique tangente horizontale sur $]-1,0[$ est au point $-\frac{1}{\alpha}$. Enfin, en 0, la première expression trouvée de f' précédemment reste vraie d'où $f'(0)=2\neq 0$ et il n'y a pas de tangente horizontale en ce point.
8. Tangente horizontale en $\pm\frac{1}{\alpha}$. Symétrie par rapport à l'origine. "Prolongement" en 1 avec la valeur 0.