DEVOIR SURVEILLÉ N° 5

Polynômes
Matrices

Durée : 4 heures

Lundi 1 Mars 2021

Documents et Calculatrices Non Autorisés

Exercice 1

Soit la matrice $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On note également $\lambda_1 = 1 - \sqrt{2}$ et $\lambda_2 = 1 + \sqrt{2}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que $H^n = \begin{pmatrix} a_n & 0 & b_n \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ b_n & 0 & a_n + 2b_n \end{pmatrix}$, et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, exprimer b_{n+2} en fonction de b_{n+1} et b_n puis en déduire l'expression de b_n en fonction de n, λ_1 et λ_2.
3. Pour tout entier n non-nul, exprimer a_n en fonction de n, λ_1 et λ_2.

Exercice 2

Soit $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et l'ensemble $E = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ MD = DM\}$.

1. Déterminer les matrices de E.
2. On considère l'équation $M^2 - M + D = 0$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer qu'il n'existe pas de solutions M telles que M soit diagonale.
   (b) Montrer, sans calculs de tableaux, que si M est solution, alors $M \in E$.
   (c) ** Montrer qu'il existe une infinité de solutions à cette équation.

Exercice 3

On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$P_0(X) = 2$, $P_1(X) = X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+2}(X) = XP_{n+1}(X) - P_n(X)$.

1. Déterminer P_2 et P_3.
2. Rappeler précisémment les formules reliant $deg(P+Q)$ à $deg(P)$ et $deg(Q)$, pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$.
3. Déterminer le degré de P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^\star$, $\quad P_n(z + \frac{1}{z}) = z^n + \frac{1}{z^n}$.
5. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Déterminer un nombre complexe z de module 1 tel que $z + \frac{1}{z} = 2\cos t$.
   En déduire la valeur de $P_n(2\cos t)$ en fonction de n et t.
   (b) Résoudre, pour $n \geq 1$, l'équation $\cos(nt) = 0$ d'inconnue $t \in]0, \pi[$. Combien y a-t-il de solutions distinctes ?
   (c) ** En déduire les racines de P_n, pour $n \geq 1$. (Justifier qu'on les obtient bien toutes !)

Exercice 4

On considère la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $T_0(X) = 1$, $T_1(X) = 1 - 2X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2}(X) = 2(1-2X)T_{n+1}(X) - T_n(X)$.
On pose de plus : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = T_n(-1)$.

1. Déterminer le polynôme T_2 ainsi que les réels v_0, v_1 et v_2.
2. Reconnaître la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est un entier strictement positif.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré de T_n et montrer que T_n est à coefficients entiers.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, quel est le coefficient dominant de T_n ? *Aucune justification n'est attendue.*

Exercice 5

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. (a) Calculer $A^2 - 4A$.
   (b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.
2. (a) Déterminer la matrice $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $T = 2I + N$ et calculer N^2.
   (b) Déterminer alors, pour tout entier naturel n, la matrice T^n en fonction de I et de N, puis en fonction de I et de T.
3. (a) Montrer que la matrice Q est inversible et déterminer Q^{-1}. *On admettra ensuite que* $A = QTQ^{-1}$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = QT^nQ^{-1}$.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = n2^{n-1}A - (n-1)2^nI$.
   (d) Vérifier alors que la formule du 3.(c) reste vraie pour $n = -1$.

Exercice 6

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation $M^3 = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ où A est la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -10 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

On définit de plus la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. ***Question préliminaire*** – Soient α, β et γ trois réels distincts.
   Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec la matrice $\mathrm{diag}(\alpha, \beta, \gamma)$.
2. (a) Montrer que la matrice P est inversible et calculer P^{-1}.
   (b) On pose alors $D = P^{-1}AP$. Calculer la matrice D.
3. ***Analyse*** – Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice solution de l'équation c'est-à-dire vérifiant $M^3 = A$.
   (a) Montrer que A et M commutent.
   (b) En déduire que $P^{-1}MP$ et D commutent.
   (c) Justifier alors que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale. On note alors Δ cette matrice diagonale.
   (d) Vérifier que $\Delta^3 = D$ et déterminer explicement Δ.
   (e) Déterminer alors M.
4. ***Synthèse*** – Conclure.

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} X^k$.

1. Soit un entier $n \geq 2$ fixé dans toute cette question.
   (a) Donner le degré et le coefficient dominant de P_n.
   (b) On note (E) l'équation $(z+1)^n = z^n$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
      i. Vérifier que 0 n'est pas solution de (E).
      ii. Montrer que l'ensemble des solutions de (E) est
$$\left\{ \frac{-i}{2\sin(\frac{k\pi}{n})} \cdot e^{-i\frac{k\pi}{n}} \;\middle|\; k \in [\![1, n-1]\!] \right\}.$$
   (c) Montrer que
$$P_n(X) = n \prod_{k=1}^{n-1} \left(X + \frac{i}{2\sin(\frac{k\pi}{n})} \cdot e^{-i\frac{k\pi}{n}} \right).$$
2. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose
$$A_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$
   (a) Compléter le programme suivant qui permet de calculer A_n, l'entier n étant rentré par l'utilisateur :
```
n = ...
a = ...
....
   a = ...
end
disp(...)
```
   (b) Soit $n \geq 2$. En remarquant que $P_n(0) = 1$, montrer que
$$A_n = \frac{n}{2^{n-1}}. \qquad (\star)$$
   L'égalité $(\star)$ est donc valable pour tout entier $n \geq 2$.
   (c) Vérifier « à la main » l'égalité $(\star)$ pour $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ et $n = 6$.
   (d) Soit un entier $n \geq 1$.
      i. Montrer que
$$A_{2n} = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \right)^2.$$
      ii. En déduire que
$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$
   (e) Soit un entier $n \geq 1$. En imitant la démarche de la question précédente, montrer que
$$\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}.$$

Fin

Exercice 1

Warning

The removed page will never be recovered, do you want to delete it anyway?

OK   Annuler
----

1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, **il existe** deux réels a_n et b_n tels que $H^n = \begin{pmatrix} a_n & 0 & b_n \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ b_n & 0 & a_n + 2b_n \end{pmatrix}$.

   $n = 0$: trouvons a_0 et b_0 qui conviennent. Or $H^0 = I_3$, donc $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ permettent d'avoir la forme souhaitée.

   Supposons que pour un certain n, on a trouvé deux réels a_n et b_n tels que $H^n = \begin{pmatrix} a_n & 0 & b_n \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ b_n & 0 & a_n + 2b_n \end{pmatrix}$. Et trouvons deux réels a_{n+1} et b_{n+1} tels que $H^{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & 0 & b_{n+1} \\ 0 & (-2)^{n+1} & 0 \\ b_{n+1} & 0 & a_{n+1} + 2b_{n+1} \end{pmatrix}$.

   Or $H^{n+1} = H^n H = \begin{pmatrix} a_n & 0 & b_n \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ b_n & 0 & a_n + 2b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_n & 0 & a_n + 2b_n \\ 0 & (-2)^{n+1} & 0 \\ a_n + 2b_n & 0 & 2a_n + 3b_n \end{pmatrix}$. Donc en posant $a_{n+1} = b_n (*)$ et $b_{n+1} = a_n + 2b_n (**)$ on a la forme voulue.

   Conclure, en donnant les relations de récurrence trouvées des deux suites.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant (**) $b_{n+2} = a_{n+1} + 2b_{n+1} = b_n + 2b_{n+1}$ d'après (*). Donc la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre 2 : on résout $x^2 = 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$.

   On trouve $\Delta = 8$ d'où $x_1 = \frac{2-\sqrt{8}}{2} = \frac{2-\sqrt{4}\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} = \lambda_1$ et de même, $x_2 = \lambda_2$.

   Donc : $\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \lambda(\lambda_1)^n + \mu(\lambda_2)^n$.

   Les conditions initiales donnent : $\begin{cases} \lambda(\lambda_1)^0 + \mu(\lambda_2)^0 = b_0 \\ \lambda(\lambda_1)^1 + \mu(\lambda_2)^1 = b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda\lambda_1 + \mu\lambda_2 = 1 \end{cases}$ puisque $b_1 = a_0 + 2b_0 = 1$

   $\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\mu \\ -\mu(1-\sqrt{2}) + \mu(1+\sqrt{2}) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\mu \\ 2\mu\sqrt{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \mu = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$

   Finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-(1-\sqrt{2})^n + (1+\sqrt{2})^n)$.

3. Pour la forme explicite de a_n inutile de refaire tous les calculs !

   On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = b_n$ donc pour tout $\boxed{n \in \mathbb{N}^*}$, $a_n = b_{n-1}$.

   (Ici l'énoncé demandait explicitement la forme de a_n pour n non-nul, mais j'ai décidé de le rédiger comme si

Exercice 2

1. Soit $M=\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Alors $MD=\begin{pmatrix} 0 & 3b & 3c\\ 0 & 3e & 3f\\ 0 & 3h & 3i\end{pmatrix}$ et $DM=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 3d & 3e & 3f\\ 3g & 3h & 3i\end{pmatrix}$.

   D'où $MD=DM\Leftrightarrow b=c=d=g=0$ et $E=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & e & f\\ 0 & h & i\end{pmatrix}, a,e,f,h,i\in\mathbb{R}\right\}$

2. (a) Soit une matrice diagonale $M=\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}$ alors $M^2-M+D=\begin{pmatrix} a^2-a & 0 & 0\\ 0 & b^2-b+3 & 0\\ 0 & 0 & c^2-c+3\end{pmatrix}$

   donc $M^2-M+D=0\Rightarrow b^2-b+3=0$ impossible car $\Delta<0$.

   (b) $M^2-M+D=0\Leftrightarrow D=M-M^2$ d'où $DM=M^2-M^3$ et $MD=M^2-M^3$. Donc $MD=DM$ et $M\in E$.

   (c) *** Les solutions sont à chercher parmi les matrices de E : on commence donc par résoudre l'équation avec de telles matrices.

   Soit $M=\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & e & f\\ 0 & h & i\end{pmatrix}$. Alors $M^2-M+D=0\Leftrightarrow\begin{cases} a^2-a=0\\ e^2+hf-e-3=0\\ ef+if-f=0\\ eh+ih-h=0\\ fh+i^2-i-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a(a-1)=0\\ e^2+hf-e+3=0\\ f(e+i-1)=0\\ h(e+i-1)=0\\ fh+i^2-i+3=0\end{cases}$

   Le système étant difficile, on ne va pas chercher à le résoudre par équivalences.
   Il suffit de trouver une infinité de solutions. Pour L_1, choisir $a=0$ ou $a=1$. Pour valider L_3 et L_4, prendre $e+i-1=0\Leftrightarrow i=e-1$ (si on avait pris $f=h=0$, les lignes L_2 et L_5 n'auraient pas donné de solutions cf 2.(a)). Réaliser alors que sous cette condition, $L_5=L_2$. Il reste donc L_2 (en plus de $i=e-1$; et de $a\in\{0,1\}$). Or dès que $hf<0$, on obtient $\Delta>0$ donc il y aura deux solutions en e (donc en i).
   Il y a une infinité de $hf<0$ possibles d'où la conclusion.

Exercice 3

1. On calcule $P_2(X) = XP_1(X) - P_0(X) = X^2 - 2$ et $P_3(X) = XP_2(X) - P_1(X) = X^3 - 3X$.
2. cf cours !
3. On conjecture que le degré de P_n est n. Montrons-le par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$.
   Initialisation : Comme $P_0(X) = 2$, $\deg P_0 = 1$ et comme $P_1(X) = X$, $\deg P_1 = 1$.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $deg(P_n) = n$ et $\deg P_{n+1} = n+1$. Alors $\deg(XP_{n+1}) = n+2$ et $\deg(-P_n) = n$.
   Comme $\boxed{n+2 \neq n}$, on en déduit que $\deg(XP_{n+1} - P_n) = \max(n+2, n) = n+2$, i.e. $\deg P_{n+2} = n+2$. Conclure.
4. SOit $z \in \mathbb{C}^*$. Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition "$P_n(z + \frac{1}{z}) = z^n + \frac{1}{z^n}$"
   Initialisation : Comme P_0 est constant, on a $P_0(z + \frac{1}{z}) = 2$ et $z^0 + \frac{1}{z^0} = 2$ (rappel : $z^0 = 1$).
   De même, $P_1(z + \frac{1}{z}) = z + \frac{1}{z} = z^1 + \frac{1}{z^1}$.
   Hérédité : Supposons que pour un certain n : $P_n(z) = z^n + \frac{1}{z^n}$ et $P_{n+1}(z) = z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}$. Alors d'après la relation de récurrence, $P_{n+2}(z + \frac{1}{z}) = (z + \frac{1}{z})P_{n+1}(z + \frac{1}{z}) - P_n(z + \frac{1}{z})$
   =[H.R.] $(z + \frac{1}{z})(z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}) - (z^n + \frac{1}{z^n}) = z^{n+2} + \frac{1}{z^n} + z^n + \frac{1}{z^{n+2}} - (z^n + \frac{1}{z^n}) = z^{n+2} + \frac{1}{z^{n+2}}$. Conclure.
5. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. On cherche z sous la forme $z = e^{i\theta}$ (puisque z de module 1). Alors $z + \frac{1}{z} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2cos(\theta)$ d'après les formules d'Euler. On en déduit que $\theta = t$ convient. Donc $z = e^{it}$ est solution.
   On a alors $P_n(2\cos t) = P_n(z + \frac{1}{z}) = z^n + \frac{1}{z^n} = e^{int} + e^{-int} = 2\cos(nt)$.
   (b) On sait (cf chapitre 1) : $\cos(nt) = 0 \Leftrightarrow nt = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $nt = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
   $\Leftrightarrow nt = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ $(n \neq 0)$.
   Comme on cherche les solutions dans $]0, \pi[$, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{\frac{(2k+1)\pi}{2n}, k \in [\![0, n-1]\!]\}$.
   Il y a n solutions distinctes.
   (c) Comme $P_n(2\cos t) = 2\cos(nt)$, on obtient en utilisant la question précédente que pour $t \in \mathcal{S}$, $P_n(2\cos(t)) = 0$ càd $2\cos(t)$ est racine de P_n. Donc on obtient n racines : $2\cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n}), k \in [\![0, n-1]\!]$, puisque ces racines sont bien distinctes (cos est strictement décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ donc injective ...).
   De plus P_n est de degré n, donc il a au plus n racines : on les a bien toutes.

Exercice 4

Ok Annuler

1. $T_2(X) = 1 - 8X + 8X^2$; $v_0 = 1$, $v_1 = 1 - 2(-1) = 3$ et $v_2 = 1 - 8(-1) + 8 = 17$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En $X = -1$, la relation de récurrence donne : $T_{n+2}(-1) = 2(1 - 2(-1))T_{n+1}(-1) - T_n(-1)$ d'où $v_{n+2} = 6v_{n+1} - v_n$. La suite v est récurrente linéaire d'ordre 2, donc on résout l'équation caractéristique :
$x^2 = 6x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 1 = 0$, $\Delta = 32$ Deux solutions $\frac{6-\sqrt{32}}{2} = 3 - \sqrt{8}$ et $3 + \sqrt{8}$. Donc il existe un unique couple (λ, μ) de réels tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \lambda(3 - \sqrt{8})^n + \mu(3 + \sqrt{8})^n$. On résout alors $\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda(3 - \sqrt{8}) + \mu(3 + \sqrt{8}) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\lambda = \mu = \frac{1}{2}$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{8})^n + \frac{1}{2}(3 + \sqrt{8})^n$.
3. Comme $\sqrt{8} < \sqrt{9} = 3$, on voit sur l'expression précédente que $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il reste à montrer que v_n est un entier. Par récurrence double : $v_0 = 1 \in \mathbb{N}$ et $v_1 = 3 \in \mathbb{N}$.
Supposons que pour un certain n, $v_n \in \mathbb{N}$ et $v_{n+1} \in \mathbb{N}$, alors $v_{n+2} = 6v_{n+1} - v_n$ est un entier, et par ce qui précède, $v_{n+2} > 0$. D'où $v_{n+2} \in \mathbb{N}$. Conclure.
4. Montrons par récurrence double que T_n est de degré n et que T_n est à coefficients entiers.
Ok pour T_0 et T_1. Supposons qu'il en est de même pour T_n et T_{n+1}. Alors comme $deg(2(1 - X)T_{n+1}) = 1 + deg(T_{n+1}) = 1 + (n + 1) = n + 2$ et que $deg(T_n) = n$, par somme (puisque $n \neq n + 2$), $deg(T_{n+2}) = n + 2$. Quant aux coefficients du polynôme T_{n+2}, la relation de récurrence $T_{n+2}(X) = 2(1 - 2X)T_{n+1}(X) - T_n(X)$ combinée avec les hypothèses de récurrence, donne le résultat. Ccl
5. On devine que pour $n \geq 1$, le coefficient dominant de T_n est $-2(-4)^{n-1}$ ce qu'on pourrait montrer par récurrence double .... Et pour $n = 0$, le coefficient dominant est 1.

Exercice 5

1. (a) $A^2 - 4A = -4I$

   (b) On déduit de la 1.(a) que $\frac{-1}{4}A^2 + A = I$ càd que $A(-\frac{1}{4}A + I) = I$. Donc A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{4}A + I$.

2. (a) $N = T - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $N^2 = N \times N = 0_3$.

   (b) Les matrices I et N commutent ; d'après la formule du binôme, $T^n = (2I + N)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{k}{n} N^k (2I)^{n-k}$. Comme $N^k = 0$ pour tout $k \geq 2$, on obtient pour $n \geq 1$ (attention, si $n = 0$, il n'y a qu'un seul terme dans la somme), $T^n = \sum\limits_{k=0}^{1} \binom{k}{n} N^k (2I)^{n-k} = \binom{n}{0} N^0 (2I)^n + \binom{n}{1} N^1 (2I)^{n-1} = 2^n I + n2^{n-1}N$.
   On remarque que pour $n = 0$: $2^n I + n2^{n-1}N = 2^0 I + 0 = I = T^0$ donc la formule trouvée reste vraie.
   Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = 2^n I + n2^{n-1}N = 2^n I + n2^{n-1}(T - 2I) = 2^n I + n2^{n-1}T - n2^n I = -(n-1)2^n I + n2^{n-1}T$.

3. (a) Poser les matrices X et Y, et résoudre le système $QX = Y$ pour obtenir l'inversibilité de Q et la matrice Q^{-1}.
   On trouve $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) Par récurrence : pour $n = 0$, $A^0 = I$ et $QT^0Q^{-1} = QIQ^{-1} = QQ^{-1} = I$.
   Supposons alors que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $A^n = QT^nQ^{-1}$. Alors
   $A^{n+1} = A^n A = QT^nQ^{-1}QTQ^{-1} = QT^nITQ^{-1} = QT^{n+1}Q^{-1}$. Conclure.

   (c) En utilisant les questions 3.(b) et 2.(b), on obtient $A^n = QT^nQ^{-1} = Q[-(n-1)2^n I + n2^{n-1}T]Q^{-1}$
   $= -(n-1)2^n QIQ^{-1} + n2^{n-1}QTQ^{-1} = -(n-1)2^n I + n2^{n-1}A$.

   (d) Pour $n = -1$, $-(n-1)2^n I + n2^{n-1}A = -(-2)2^{-1}I - 2^{-2}A = I - \frac{1}{4}A = A^{-1}$ d'après 1.(b). La formule du 3.(c) reste donc vraie pour $n = -1$.

Exercice 6

1. ***Question préliminaire*** – On pose
$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$
On calcule $B\mathrm{diag}(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\mathrm{diag}(\alpha, \beta, \gamma)B$ et l'on montre (en raisonnant par équivalences) que
$$B\mathrm{diag}(\alpha,\beta,\gamma) = \mathrm{diag}(\alpha,\beta,\gamma)B \iff \left\{\begin{array}{lcl} \beta b & = & \alpha b \\ \gamma c & = & \alpha c \\ \alpha d & = & \beta d \\ \gamma f & = & \beta f \\ \alpha g & = & \gamma g \\ \beta h & = & \gamma h \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} b & = & 0 \\ c & = & 0 \\ d & = & 0 \\ f & = & 0 \\ g & = & 0 \\ h & = & 0 \end{array}\right.,$$
la dernière équivalence découlant de ce que les trois réels α, β et γ sont distincts.
Ainsi l'ensemble cherché est l'ensemble des matrices diagonales.
2. (a) Méthode habituelle par résolution de système linéaire. On trouve que P est inversible et
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
   (b) On trouve que $D = \mathrm{diag}(8, 0, 1)$.
3. ***Analyse*** –
   (a) On peut écrire $AM = M^3M = M^4 = MM^3 = MA$.
   (b) On en déduit alors que
$$P^{-1}MPD = P^{-1}MPP^{-1}AP = P^{-1}(MA)P = P^{-1}(AM)P = P^{-1}APP^{-1}MP = DP^{-1}MP.$$
   (c) D'après la question préliminaire, comme 8, 0 et 1 sont trois réels distincts, la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale.
   (d) Comme $\Delta = P^{-1}MP$ alors $\Delta^3 = P^{-1}M^3P = P^{-1}AP = D$.
   Posons alors $\Delta = \mathrm{diag}(a, b, c)$. Alors $\Delta^3 = \mathrm{diag}(a^3, b^3, c^3)$. Donc
$$\mathrm{diag}(a^3, b^3, c^3) = \mathrm{diag}(8, 0, 1).$$
   On en déduit que $a^3 = 8$ i.e. $a = 2$. De même $b = 0$ et $c = 1$.
   Vérifier que $\Delta^3 = D$ et déterminer explicement Δ.
   (e) Comme $\Delta = P^{-1}MP$ alors $M = P\Delta P^{-1}$. En explicitant les trois matrices et en faisant un calcul de produit de trois matrices, on trouve
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$
4. ***Synthèse*** – On pose M comme à la question précédente et on calcule M^3. On trouve bien A.

Exercice 7

1. (a) On voit que le degré de P_n est $n-1$ et que son coefficient dominant est $\binom{n}{n-1}$ i.e. n.

   (b) i. Comme $(0+1)^n = 1 \neq 0 = 0^n$ alors 0 n'est pas solution de (E).

   ii. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned}
(z+1)^n = z^n \quad &\iff \quad \left(\frac{z+1}{z}\right)^n = 1\\
&\iff \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!] \text{ t.q. } \frac{z+1}{z} = e^{i\cdot\frac{2k\pi}{n}}\\
&\iff \quad \exists k \in [\![1, n-1]\!] \text{ t.q. } \frac{z+1}{z} = e^{i\cdot\frac{2k\pi}{n}}
\end{aligned}$$

car $z+1 \neq z$ et donc $\frac{z+1}{z} \neq 1$.

Soit maintenant $k \in [\![1, n-1]\!]$. Alors $e^{i\cdot\frac{2k\pi}{n}} - 1 \neq 0$ et donc

$$\begin{aligned}
\frac{z+1}{z} = e^{i\cdot\frac{2k\pi}{n}} \quad &\iff \quad z+1 = e^{i\cdot\frac{2k\pi}{n}} z\\
&\iff \quad z\left(e^{i\cdot\frac{2k\pi}{n}} - 1\right) = 1\\
&\iff \quad z = \frac{1}{e^{i\cdot\frac{2k\pi}{n}} - 1}.
\end{aligned}$$

Or d'après la technique de l'angle médian puis une formule d'Euler

$$\frac{1}{e^{i\cdot\frac{2k\pi}{n}} - 1} = \frac{e^{-i\cdot\frac{k\pi}{n}}}{e^{i\cdot\frac{k\pi}{n}} - e^{-i\cdot\frac{k\pi}{n}}} = \frac{e^{-i\cdot\frac{k\pi}{n}}}{2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \frac{-i}{2\sin(\frac{k\pi}{n})} \cdot e^{-i\frac{k\pi}{n}}.$$

L'ensemble des solutions de (E) est donc bien

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{-i}{2\sin(\frac{k\pi}{n})} \cdot e^{-i\frac{k\pi}{n}} \;\middle|\; k \in [\![1, n-1]\!] \right\}.$$

   (c) D'après la formule du binôme de Newton,

$$P_n(X) = (X+1)^n - X^n.$$

Ainsi les racines (complexes) de P_n sont exactement les solutions (complexes) de (E). L'équation (E) admet $n-1$ solutions distinctes d'après la question précédente et P_n est de degré $n-1$ et de coefficient dominant égal à n donc on en déduit directement que P_n se factorise comme suit :

$$P_n(X) = n\prod_{k=1}^{n-1}\left(X + \frac{i}{2\sin(\frac{k\pi}{n})} \cdot e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right).$$

Remarque : pour justifier que les $n-1$ complexes de l'ensemble $\mathcal{S}$ sont distincts, on peut remarquer que leurs arguments respectifs vérifient

$$-\pi < -\frac{(n-1)\pi}{n} < \ldots < -\frac{\pi}{n} < 0.$$

2. (a) Voici le programme complété :

```
n = input('entrer une valeur de n :')
a = 1
for k = 1:n-1
   a = a*sin(k*%pi/n)
end
disp(a)
```

(b) On remarque en effet que $P_n(0) = (0+1)^n - 0^n = 1$ (car $n \geq 1$).
Or d'après la question 1.(c)

$$P_n(0) = n\prod_{k=1}^{n-1} \frac{i \cdot e^{-i\frac{k\pi}{n}}}{2\sin(\frac{k\pi}{n})} = n \cdot \frac{i^{n-1} \cdot e^{-i\frac{\pi}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}}}{2^{n-1}A_n} = n \cdot \frac{i^{n-1}(e^{-i\frac{\pi}{2}})^{n-1}}{2^{n-1}A_n} = \frac{n}{2^{n-1}A_n}.$$

Donc

$$1 = \frac{n}{2^{n-1}A_n}$$

ce qui nous donne bien l'égalité $(\star)$.

(c) Par définition

$$A_2 = \prod_{k=1}^{1} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = \frac{2}{2}.$$

De même

$$A_3 = \prod_{k=1}^{2} \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2^2}.$$

De même

$$A_4 = \prod_{k=1}^{3} \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\times 1\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} = \frac{4}{2^3}.$$

Enfin

$$A_6 = \prod_{k=1}^{5} \sin\left(\frac{k\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{3}{16} = \frac{6}{2^5}.$$

(d) i. Par définition (comme $2n \geq 2$)

$$A_{2n} = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \times 1 \times \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \times \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\pi - \frac{k\pi}{2n}\right).$$

Or, par le changement d'indice $[k' = 2n-k]$,

$$\prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\pi - \frac{k\pi}{2n}\right) = \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-k)\pi}{2n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right).$$

On obtient donc bien

$$A_{2n} = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)^2.$$

ii. Comme $2n \geq 2$, d'après $(\star)$,
$$A_{2n} = \frac{2n}{2^{2n-1}} = \frac{n}{2^{2n-2}}.$$
Donc
$$\left(\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)^2 = \frac{n}{2^{2n-2}}.$$
Comme
$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \geq 0$$
car la fonction sin est positive sur $[0, \pi]$, alors on obtient bien
$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

(e) Comme $2n+1 \geq 2$, alors par définition
$$A_{2n+1} = \prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \times \prod_{k=n+1}^{2n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \times \prod_{k=n+1}^{2n} \sin\left(\pi - \frac{k\pi}{2n+1}\right).$$
Or, par le changement d'indice $[k' = 2n+1-k]$,
$$\prod_{k=n+1}^{2n} \sin\left(\pi - \frac{k\pi}{2n+1}\right) = \prod_{k=n+1}^{2n} \sin\left(\frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1}\right) = \prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right).$$
Donc
$$A_{2n+1} = \left(\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^2.$$
Or d'après $(\star)$,
$$A_{2n+1} = \frac{2n+1}{2^{2n}}.$$
Donc
$$\left(\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^2 = \frac{2n+1}{2^{2n}}.$$
Pour les mêmes raisons que précédemment
$$\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \geq 0$$
donc
$$\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}.$$