Devoir Maison N° 1

Logie

Sommes

Exercice 1. Soient a et b deux réels strictement positifs distincts.

1. Montrer que $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$.
2. En déduire que si $a\neq 1$, alors $a+\frac{1}{a}>2$.

Exercice 2.

1. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $e^x\geq 1+x$.
2. En déduire que pour tout réel $x>-1$, on a : $\ln(1+x)\leq x$.

Exercice 3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=2$, $u_1=-1$ et

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+2}=\frac{n+3}{n+2}u_{n+1}-\frac{1}{n+2}u_n$$

Soit α et β deux réels. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on note $\mathcal{P}(n)$ l'assertion : " $u_n=\alpha+\beta\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ ".

1. Déterminer α et β tels que $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ soient vraies.
2. Démontrer alors que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 4.

1. Vérifier que, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+2)}$$

2. En déduire l'expression de $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.
3. Retrouver ce résultat par une récurrence simple.

Exercice 5.

1. Calculer, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$.
2. *Une application :* on écrit les nombres impairs de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 3 & 5 & 7 & \\ 9 & 11 & 13 & 15 & 17 \\ & & \cdots & & \end{array}$$

Déterminer la position de 2021.

Proposition de solutions

Solution 1 1.

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2=\frac{a^2+b^2-2ab}{ab}=\frac{(a-b)^2}{ab}$$

Or a et b sont deux réels distincts donc $(a-b)^2>0$ et a et b sont deux réels strictement positifs donc $ab>0$.

Par quotient de termes strictement positifs, $\frac{(a-b)^2}{ab}>0$.

Conclusion : $\boxed{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2.}$

2. C'est une simple application du résultat de la question 1 en posant $b=1$. On a donc bien :

Conclusion : $\boxed{\text{si } a\neq 1, \text{ alors } a+\frac{1}{a}>2.}$

Solution 2 1. Nous verrons différentes façons de montrer cette inégalité classique au cours de l'année. Commençons par la plus élémentaire, que vous avez sans aucun doute vue au lycée : une étude de fonction.

On note, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f : x\longmapsto e^x-1-x$.

La fonction exp et la fonction $x\mapsto -1-x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc, par somme, f est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, on a, pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=e^x-1$.

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}_-$, $f'(x)\leq 0$ et pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $f'(x)\geq 0$. Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc elle admet un minimum en 0. Or $f(0)=0$ donc f est positive sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } x\in\mathbb{R}, \text{ on a : } e^x\geq 1+x.}$

2. Soit x un réel strictement supérieur à -1.

D'après la question précédente, $1+x\leq e^x$. De plus $1+x>0$ et $e^x>0$ donc par croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$, on a : $\ln(1+x)\leq\ln(e^x)$.

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout réel } x \text{ strictement supérieur à } -1,\ \ln(1+x)\leq x.}$

Solution 3 1. La propriété $\mathcal{P}(0)$ est $u_0=\alpha+\beta$ (*on rappelle que par convention* $0!=1$).

La propriété $\mathcal{P}(1)$ est $u_1=\alpha+2\beta$.

On doit donc résoudre le système :

$$\begin{cases}\alpha & + & \beta & = & 2\\ \alpha & + & 2\beta & = & -1\end{cases}\ \text{(système noté } \mathcal{S})$$

Pour ce faire, on peut utiliser la première ligne pour exprimer, par exemple, α en fonction de β, puis réinjecter ce qu'on a obtenu dans la deuxième ligne afin de calculer β : c'est ce qu'on appelle une résolution par *substitution.* En classe préparatoire on attendra plutôt de vous une résolution par *combinaison* : il s'agit de faire des combinaisons entre les lignes afin d'isoler une inconnue. Ici on remplace donc la deuxième ligne par la deuxième ligne moins la première (en n'oubliant pas d'effectuer la même opération sur le second membre).

$$\mathcal{S}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha & + & \beta & = & 2\\ & & \beta & = & -1-2\end{cases}$$

Reste alors à isoler α dans la première équation :

$$\mathcal{S}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha & = & 2-\beta\\ \beta & = & -3\end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{\mathcal{P}(0) \text{ et } \mathcal{P}(1) \text{ soient vraies si et seulement si } \alpha=5 \text{ et } \beta=-3.}$

2. La propriété $\mathcal{P}(n)$ devient donc : " $u_n=5-3\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ ".

Montrons par récurrence double que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

— *Initialisation :* d'après la question précédente, $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies (*on a même choisi* α *et* β *afin que ce soit le cas*).

— *Hérédité :* soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies. Montrons $\mathcal{P}(n+2)$.
Par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$u_{n+2}=\frac{n+3}{n+2}u_{n+1}-\frac{1}{n+2}u_n$$

Donc d'après l'hypothèse de récurrence,

$$u_{n+2}=\frac{n+3}{n+2}\left(5-3\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}\right)-\frac{1}{n+2}\left(5-3\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= \frac{n+3}{n+2}\left(5-3\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{3}{(n+1)!}\right)-\frac{1}{n+2}\left(5-3\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)\\
&= 5\left(\frac{n+3}{n+2}-\frac{1}{n+2}\right)-3\left(\frac{n+3}{n+2}-\frac{1}{n+2}\right)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{3(n+3)}{(n+2)(n+1)!}\\
&= 5-3\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{3(n+3)}{(n+2)!}
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
5-3\sum_{k=0}^{n+2}\frac{1}{k!} &= 5-3\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-3\sum_{k=n+1}^{n+2}\frac{1}{k!}\\
&= 5-3\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-3\left(\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}\right)\\
&= 5-3\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-3\frac{1+n+2}{(n+2)!}\\
&= 5-3\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{3(n+3)}{(n+2)!}
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

— *Conclusion :* $\boxed{\text{le principe de récurrence assure que pour tout } n\in\mathbb{N},\ u_n = 5-3\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}.}$

Solution 4 1. Soit $k\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+2)} &= \frac{(k+1)(k+2)-2k(k+2)+k(k+1)}{2k(k+1)(k+2)}\\
&= \frac{k^2+3k+2-2k^2-4k+k^2+k}{2k(k+1)(k+2)}\\
&= \frac{2}{2k(k+1)(k+2)}\\
&= \frac{1}{k(k+1)(k+2)}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } k\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+2)}.}$

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+2)}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2(k+2)}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{2}\right)\quad\text{(après télescopage)}\\
&= \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)\\
&= \frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}.}$

3. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\mathcal{P}(n)$ l'assertion : " $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$ ".
   Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   - *Initialisation :* d'une part $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{6}$, d'autre part $\frac{1}{4} - \frac{1}{2(1+1)(1+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
   - *Hérédité :* soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{n+3-2}{2(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{n+1}{2(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+2)(n+3)}
\end{aligned}$$

     Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - *Conclusion :* $\boxed{\text{le principe de récurrence assure que pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}.}$

Solution 5

1. Le calcul des premiers termes permet de conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.
   On montre cela par récurrence, cela ne présente pas de difficulté (voir par exemple le corrigé de l'interrogation de cours n°1).
2. Commençons par remarquer que $2021 = 2 \times 1010 + 1$ donc 2021 est le 1011-ième nombre impair.
   Dans l'écriture des nombres impairs de l'énoncé, il y a 1 nombre sur la première ligne, 3 sur la deuxième, 5 sur la troisième etc. Autrement dit il y a k nombres sur la k-ième ligne pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, à la fin de la n-ième ligne, on a écrit $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ nombres.
   On résout donc l'inéquation $n^2 \leq 1011$, d'inconnue $n \in \mathbb{N}^*$, qui donne $n \leq 31$.
   Conclusion : $\boxed{\text{comme } 31^2 = 961 \text{ et } 2021 - 961 = 50, 2021 \text{ est à la 50-ième place de la 32-ième ligne.}}$