Devoir Maison N°7

Probas 1

élémentaire & conditionnelle

Sur une ligne de bus, à une station donnée, une enquête a permis de révéler qu'un bus a la probabilité $p = 0.8$ d'avoir un retard inférieur à 7 minutes sur l'horaire officiel.

1. Monsieur V. fréquente cette ligne de bus tous les jours pendant n jours, où $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé. On suppose que les retards journaliers sont indépendants. On pose pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ A_k l'événement "le jour k est le jour où pour la première fois Monsieur V. attend plus de 7 minutes ", et A_0 l'événement " le temps d'attente est inférieur à 7 minutes pendant les n jours".
   (a) Introduire des événements élémentaires.
   (b) Décrire A_0 à l'aide de ces événements puis déterminer $P(A_0)$.
   (c) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, décrire A_k puis calculer $P(A_k)$.
   (d) Vérifier par le calcul que $\sum_{k=0}^{n} P(A_k) = 1$. Comment aurait-on pu justifier autrement ?
2. *facultatif :* Lassé des retards, Monsieur V. décide de prendre le bus ou le métro selon le protocole suivant :
   — Le premier jour, il prend le bus.
   — Si le jour n ($n \in \mathbb{N}^*$) il attend plus de 7 minutes pour prendre le bus, le jour $n+1$ il prend le métro, sinon il prend de nouveau le bus.
   — Si le jour n il prend le métro, le jour $n+1$ il prend le métro ou le bus de façon équiprobable.

   On note p_n la probabilité que Monsieur V. prenne le bus le jour n.
   (a) Justifier que pour tout entier naturel n non nul : $p_{n+1} = (p - \frac{1}{2})p_n + \frac{1}{2}$
   (b) En déduire l'expression de p_n en fonction de n. La suite (p_n) est-elle convergente ?

Fin

Corrigé du devoir maison 5

1. (a) On pose pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, T_k "Monsieur V. attend moins de 7 minutes son bus le jour k"

   (b) $A_0 = T_1 \cap \cdots \cap T_n$ et par indépendance mutuelle des retards journaliers, $P(A_0) = P(T_1)\cdots P(T_n) = p^n$

   (c) Pour $k \in [\![1,n]\!]$, $A_k = T_1 \cap \cdots \cap T_{k-1} \cap \overline{T_k}$ d'où par indépendance, $P(A_k) = p^{k-1}(1-p)$.

   (d) Attention, on ne peut pas remplacer $P(A_k)$ dans $\sum_{k=0}^{n} P(A_k)$, car il y a deux expressions différentes pour $P(A_k)$ selon $k=0$ ou $k \geq 1$. Il faut donc couper la somme à l'aide de la relation de Chasles :
   $\sum_{k=0}^{n} P(A_k) = P(A_0) + \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = p^n + \sum_{k=1}^{n} p^{k-1}(1-p) = p^n + (1-p)\sum_{k=0}^{n-1} p^k = p^n + (1-p)\frac{1-p^n}{1-p} = p^n + 1 - p^n = 1.$
   On aurait aussi pu justifier que $(A_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ forme un s.c.e.

2. (a) On introduit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, B_n "Monsieur V. prend le bus le jour n". Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(B_n, \overline{B_n}\right)$ est un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales, $p_{n+1} = P\left(B_{n+1}\right) = P(B_n)P_{B_n}\left(B_{n+1}\right) + P(\overline{B_n})P_{\overline{B_n}}\left(B_{n+1}\right) = p_n \times p + (1-p_n)\frac{1}{2}$. En effet, sachant qu'il a pris le bus le jour n (B_n), il prend le bus le jour $n+1$, si le bus a eu un retard inférieur à 7 minutes, événement de probabilité p. d'où $P_{B_n}(B_{n+1}) = p$. Et, sachant qu'il a pris le métro le jour n, il a une chance sur deux de prendre le bus le jour $n+1$ d'où $P_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) = \frac{1}{2}$. On obtient $p_{n+1} = \left(p - \frac{1}{2}\right)p_n + \frac{1}{2}$.

   (b) On reconnaît une suite arithmético-géométrique, et on remarque $p_1 = 1$ car le premier jour, il prend le bus.
   Or $\alpha = \left(p - \frac{1}{2}\right)\alpha + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2} - p\right)\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{3-2p}$ car $p = 0.8 \neq 3/2$.
   On sait que la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = p_n - \alpha$ est géométrique de raison $p - 1/2$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \alpha = 1 - \alpha$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = p_n - \alpha = (1-\alpha)(p - \frac{1}{2})^{n-1}$ d'où $p_n = (1-\alpha)(p-\frac{1}{2})^{n-1} + \alpha$.
   Comme $\left|p - \frac{1}{2}\right| = 0.3 < 1$ alors $\left(p - \frac{1}{2}\right)^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et donc $p_n \underset{n\to+\infty}{\to} \alpha$. La suite est convergente.