Devoir Maison N°8

Probas 2

VAR finies

Question :
Soit X une variable suivant la loi binomiale de paramètres n et p. Déterminer l'espérance de 3^X.

Un exercice au choix, selon votre niveau. Vous pouvez bien sûr me rendre les deux exercices.

Exercice 1: *option plus facile*

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On dispose d'une pièce donnant "Pile" avec la probabilité $p \in]0,1[$ et "Face" avec la probabilité $q = 1-p$.
On lance la pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :
• Soit si l'on a obtenu "Pile" .
• Soit si l'on a obtenu n fois "Face".
On note T_n le nombre de lancers effectués, X_n le nombre de "Pile" obtenus et enfin Y_n le nombre de "Face" obtenus.
On admet que T_n, X_n et Y_n sont des variables aléatoires toutes les trois définies sur un espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; P)$ que l'on ne cherchera pas à préciser.

1. (a) Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, déterminer, en distinguant le cas $k = n$, la probabilité de $P(T_n = k)$.
   (b) Vérifier par le calcul que $\sum\limits_{k=1}^{n} P(T_n = k) = 1$.
   (c) Montrer que pour $x \neq 1$, $\sum\limits_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} = \frac{1-nx^{n-1}+x^n(n-1)}{(1-x)^2}$.
   (d) Etablir que T_n admet une espérance et vérifier que $E(T_n) = \frac{1-q^n}{1-q}$.
2. Donner la loi de X_n et vérifier que $E(X_n) = 1 - q^n$.
3. (a) Donner la loi de Y_n.
   (b) Ecrire une égalité liant les variables aléatoires T_n , X_n et Y_n puis en déduire $E(Y_n)$.

Exercice 2: *option plus difficile, du fait de la partie 2*

Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On y prélève une boule, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve et on réalise ainsi n tirages ($n \geq 1$).
Étude du cas $c = 0$: On effectue donc ici n tirages avec remise de la boule dans l'urne.
On note X la v.a.r. égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n tirages et Y la v.a.r. égale au numéro du tirage où l'on obtient une boule blanche pour la première fois, si un tel tirage existe, et qui prend la valeur 0 sinon.

1. Déterminer la loi de X. Donner la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$.
2. Déterminer la loi de Y.
3. Vérifier par le calcul que : $\sum\limits_{k=0}^{n} P(Y = k) = 1$. Comment aurait-on pu justifier autrement ?
4. Pour $x \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que : $\sum\limits_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2}$.
5. En déduire $E(Y)$.

Étude du cas $c = 1$
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n tirages.

1. Donner la loi de X_1, puis la loi de X_2.
2. (a) Dorénavant, on pose $n \geq 2$. Déterminer $X_n(\Omega)$ puis montrer que $P(X_n = 0) = \frac{n}{n+1} P(X_{n-1} = 0)$.
   OU DIRECTEMENT $P(X_n = 0) = \frac{1}{n+1}$
   (b) ** Montrer que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $P(X_n = j) = \frac{j}{n+1} P(X_{n-1} = j-1) + \frac{n-j}{n+1} P(X_{n-1} = j)$.
   (c) En déduire par récurrence que $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0,n]\!])$.
   (d) Calculer l'espérance et la variance de X_n.

Corrigé

Question : X est une variable finie, donc d'après la formule de transfert, 3^X admet une espérance et $E(3^X) = \sum\limits_{k\in X(\Omega)} 3^k P(X=k) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (3p)^k (1-p)^{n-k} = (3p+1-p)^n = (2p+1)^n$ d'après la formule du binôme.

Exercice 1 : $\longrightarrow$ introduire pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ les événements P_i, F_i ...

1. (a) La case n est particulière car 2 conditions d'arrêt ! Soit $k \in [\![1,n-1]\!]$. Alors $(T_n = k) = F_1 \cap \cdots F_{k-1} \cap P_k$ et d'après la formule des probabilités composées (à écrire), $P(T_n = k) = q^{k-1}p$, avec $q = 1-p$.
$(T_n = n) = [F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap F_n] \cup [F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap P_n] = F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1}$ d'où $P(T_n = n) = q^{n-1}$.

   (b) Attention de bien couper la somme avant de pouvoir remplacer $P(T=k)$! D'après la relation de Chasles : $\sum\limits_{k=1}^{n} P(T_n = k) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} P(T_n = k) + P(T_n = n) = (\sum\limits_{k=1}^{n-1} pq^{k-1}) + q^{n-1} = (p\sum\limits_{j=0}^{n-2} q^j) + q^{n-1} = (p\frac{1-q^{n-1}}{1-q}) + q^{n-1} = (1-q^{n-1}) + q^{n-1}$ (car $1-q=p$) $=1$.
Autre argument (si l'énoncé n'avait pas dit "par le calcul") : $T_n(\Omega) = [\![1,n]\!]$, donc $\{(T_n = k), k \in [\![1,n]\!]\}$ est un s.c.e donc $\sum\limits_{k=1}^{n} P(T_n = k) = 1$.

   (c) Pour $x \neq 1$, le polynôme $P_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} x^k$ vaut $P_n(x) = \frac{x-x^n}{1-x}$. P_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour $x \neq 1$ $P_n'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} = \frac{(1-nx^{n-1})(1-x)+(x-x^n)}{(1-x)^2} = \frac{1-nx^{n-1}+x^n(n-1)}{(1-x)^2}$.
Ou partir de $R_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$ de même dérivée ... (puisque la dérivée du terme 1 vaut 0).

   (d) T_n est une variable finie donc admet une espérance et
$E(T_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} kP(T_n=k) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} kP(T_n=k) + nP(T_n=n)$ (relation de Chasles) $= p\sum\limits_{k=1}^{n-1} kq^{k-1} + nq^{n-1}$
$= p\frac{1-nq^{n-1}+(n-1)q^n}{(1-q)^2} + nq^{n-1} = \frac{1-nq^{n-1}+(n-1)q^n}{1-q} + \frac{nq^{n-1}(1-q)}{1-q} = \frac{1-nq^{n-1}+nq^n-q^n+nq^{n-1}-nq^n}{1-q} = \frac{1-q^n}{1-q}$.

2. $X_n(\Omega) = \{0,1\}$ (donc X_n suit une loi de bernoulli) et $(X_n = 0) = F_1 \cap \cdots \cap F_n$ d'où $P(X_n = 0) = q^n$.
On en déduit que $P(X_n = 1) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - q^n$ puis que $E(X_n) = 1 - q^n$.

3. (a) $Y_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$. Pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, $(Y_n = k)$ se réalise ssi l'expérience finit par un pile : $(Y_n = k) = F_1 \cap ... \cap F_k \cap P_{k+1}$ et $P(Y_n = k) = q^k p$. Et $(Y_n = n) = F_1 \cap ... \cap F_n$ d'où $P(Y_n = n) = q^n$.
(b) Un lancer donne soit pile soit face d'où $T_n = X_n + Y_n$ et $Y_n = T_n - X_n$. Par linéarité de l'espérance, $E(Y_n) = E(T_n) - E(X_n) = \frac{1-q^n}{1-q} - (1-q^n) = (1-q^n)\left(\frac{1}{1-q} - 1\right) = (1-q^n)\frac{q}{1-q}$

Exercice 2 :

1. Les tirages se font avec remise donc sont mutuellement indépendants et à chaque tirage, la probabilité d'obtenir une boule blanche est 1/2. Comme X comptabilise le nombre de boules blanches obtenues, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.
D'où, $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$, et pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $P(X=k) = \binom{n}{k}(\frac{1}{2})^n$. De plus, $E(X) = n/2$ et $V(X) = n/4$.
2. On a $Y(\Omega) = [\![1,n]\!] \cup \{0\} = [\![0,n]\!]$. Attention, la valeur 0 est particulière !
On introduit pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, les événements N_i (resp. B_i) "obtenir une boule noire (resp. blanche) au i^e lancer".
$(Y=0) = N_1 \cap N_2 \cap ... \cap N_n$; mutuelle indépendance des tirages, $P(Y=0) = P(N_1)P(N_2)...P(N_n) = (\frac{1}{2})^n$
Soit alors $k \in [\![1,n]\!]$, $(Y=k) = N_1 \cap ... \cap N_{k-1} \cap B_k$ et donc (indépendance des tirages) $P(Y=k) = (\frac{1}{2})^{k-1}\frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^k$.
3. Attention de bien couper la somme avant de pouvoir remplacer $P(Y=k)$! D'après la relation de Chasles : $\sum\limits_{k=0}^{n} P(Y=k) = P(Y=0) + \sum\limits_{k=1}^{n} P(Y=k) = P(Y=0) + \sum\limits_{k=1}^{n} (\frac{1}{2})^k = (\frac{1}{2})^n + \frac{1}{2}\dfrac{1-(1/2)^n}{1-1/2} = (\frac{1}{2})^n + (1-(\frac{1}{2})^n)) = 1$ car $\frac{1}{2} \neq 1$
On aurait pu justifier avec l'argument $\{(Y=k), k \in [\![0,n]\!]\}$ est un s.c.e. (cf cours), puisque $Y(\Omega) = [\![1,n]\!]$.
4. Attention, penser à justifier la dérivabilité d'une fonction avant de la dériver.
$x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$ est une fonction polynômiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \neq 1$. Alors $S = \sum\limits_{k=1}^{n} kx^k = x\sum\limits_{k=1}^{n} kx^{k-1} = x\left(\sum\limits_{k=0}^{n} x^k\right)' = x \times \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)' = x \times \frac{-(n+1)x^n(1-x)+1-x^{n+1}}{(1-x)^2} =$

$x \times \frac{-(n+1)x^n+1+nx^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{-(n+1)x^{n+1}+x+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$

OU partir de $(1-x^2)S$ pour retrouver le numérateur : $(1-x)^2S = S-2xS+x^2S = \sum_{k=1}^{n} kx^k - 2\sum_{k=1}^{n} kx^{k+1} + \sum_{k=1}^{n} kx^{n+2}$, puis dans 2e somme poser $j = k+1$, et dans la 3e somme, poser $j = k+2$. Il reste à simplifier les termes qui se télescopent ...

5. D'après la relation de Chasles, $E(Y) = \sum_{k=0}^{n} kP(Y=k) = 0 + \sum_{k=1}^{n} kP(Y=k) = \sum_{k=1}^{n} k(\frac{1}{2})^k = \frac{n(1/2)^{n+2}-(n+1)(1/2)^{n+1}+1/2}{1/4}$, car $\frac{1}{2} \neq 1$.

1. $X_1(\Omega) = [\![0,1]\!]$, $(X_1 = 1) = B_1$ d'où $P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$, et $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0,1]\!]$.
Puis $X_2(\Omega) = [\![0,2]\!]$ et $(X_2 = 0) = N_1 \cap N_2$ d'où $P(X_2 = 0) = P(N_1)P_{N_1}(N_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$ (car sachant N_1, on a rajouté une boule noire avant le 2e tirage), d'où $P(X_2 = 0) = \frac{1}{3}$.
de même, $(X_2 = 2) = B_1 \cap N_2$ d'où $P(X_2 = 2) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ et par suite $P(X_2 = 1) = 1 - P(X_2 = 0) - P(X_2 = 1) = \frac{1}{3}$. $X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0,2]\!]$.

2. (a) On effectue n tirages d'où $X_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$. Puis d'après la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e. $\{(X_{n-1} = k), k \in [\![0, n-1]\!]\}$, $P(X_n = 0) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X_{n-1} = k)P_{(X_{n-1}=k)}(X_n = 0)$
$= P(X_{n-1} = 0)P_{(X_{n-1}=0)}(X_n = 0) + 0$ (justifier avec une phrase) $= P(X_{n-1} = 0) \times \frac{n}{n+1}$ car sachant $X_{n-1} = 0$, les $n-1$ tirages ont donné une boule noire, donc l'urne contient (au moment du n^{ie} tirage) : $1 + n - 1 = n$ boules noires et 1 boule blanche.
Ou par description : $(X_n = 0) = (X_{n-1} = 0) \cap N_n$ (**a justifier par une phrase**) d'où $P(X_n = 0) = P(X_{n-1} = 0)P_{(X_{n-1}=0)}(N_n) = ...$ La proba sachant est à justifier par une phrase également !

(b) Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Pour que X_n puisse prendre la valeur j, X_{n-1} n'a pas pu prendre d'autres valeurs que j ou $j-1$ (on fait un tirage de plus donc le nombre de boules blanches stagne ou augmente de 1) ! Rédaction probas totales, sce $\{(X_{n-1} = k), k \in [\![0, n-1]\!]\}$: $P(X_n = j) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X_{n-1} = k)P_{(X_{n-1}=k)}(X_n = j)$
$= 0 + P(X_{n-1} = j-1)P_{(X_{n-1}=j-1)}(X_n = j) + P(X_{n-1} = j)P_{(X_{n-1}=j)}(X_n = j) + 0$;
finalement, $P(X_n = j) = P(X_{n-1} = j-1)\frac{1+j-1}{2+n-1} + P(X_{n-1} = j-1)\frac{1+(n-1-j)}{2+n-1}$ Attention, de bien justifier au moins une des proba sachant par une phrase : par exemple : sachant $(X_{n-1} = j-1)$, on a rajouté $j-1$ boules blanches dans l'urne et donc $n-1-(j-1) = n-j$ boules noires. Au moment du n^{ie} tirage, il y a donc dans l'urne j boules blanches et $n-1+2$ boules au total
OU moins élégant, mais l'idée est là, rédaction via une description directe (même phrase d'intro !) : $(X_n = j) = [(X_{n-1} = j-1) \cap B_n] \cup [(X_{n-1} = j) \cap N_n]$ justifier réunion d'événements deux à deux incompatibles, puis passer aux probas sachant, et justifier les probas sachant.

(en fait, il aurait fallu séparer aussi le cas $j = n$ puisque X_{n-1} ne peut pas prendre la valeur n, donc il y a un problème de proba sachant dans ce cas, mais par soucis de simplification, j'ai omis ce cas particulier. La formule finale reste vraie dans ce cas.)

(c) *hérédité* : Supposons que $X_{n-1} \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, n-1]\!])$ pour un certain $n \geq 2$ donc : $X_{n-1}(\Omega) = [\![0, n-1]\!]$ et $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $P(X_{n-1} = k) = \frac{1}{n}$. Montrons que $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, n]\!]$.
Il suffit de reprendre les résultats du (a) et (b) en remplaçant toutes les probabilités $P(X_{n-1} = ...)$ par $\frac{1}{n}$.
Par exemple, si $j \in [\![1, n]\!]$, $P(X_n = j) = \frac{1}{n} \times \frac{1+j-1}{2+n-1} + \frac{1}{n}\frac{1+(n-1-j)}{2+n-1} = \frac{1+j-1+1+n-1-j}{n(n+1)} = \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}$.
De même pour $P(X_n = 0)$...

(d) Attention, on n'a pas la bonne loi pour utiliser le résultat du cours d'espérance et variance ! Soit à la main : $E(X_n) = \sum_{k=0}^{n} k\frac{1}{n+1} = \frac{n}{2}$ $E(X_n^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2\frac{1}{n+1} = \frac{n(2n+1)}{6}$ et $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{n^2+2n}{12} = \frac{(n+1)^2-1}{12}$.
Soit on utilise l'astuce du cours : poser $Z_n = 1 + X_n$, alors (à vérifier) $Z_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n+1]\!])$ d'où (cours) $E(Z_n) = ..$, $V(Z_n) = ..$, d'où par linéarité $E(X_n) = E(Z_n) - 1...$ et $V(X_n) = 1^2V(Z_n)$.