DEVOIR SURVÉILLÉ N° 2

Nombres Complexes

Durée : 3 heures

Exercice 1:

Calculer (on choisira la forme la plus facile!) :

a) $\dfrac{1+i}{1-i}$ b) $\dfrac{1+i\tan(x)}{1-i\tan(x)}$ où $x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ c) $(\sqrt{3}+i)^5$ d) $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{30}$

Exercice 2:

Calcul de sommes

1. Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$, l'équation $e^{ix} = 1$.
2. Calculer $S = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé.
3. Trouver la forme algébrique de S. (*on pourra penser à la factorisation par l'angle moitié*).
4. Donner alors les expressions de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

Exercice 3: Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Ecrire la forme algébrique de $(e^{ib}+1)^n$.
2. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{i(a+kb)}$.
3. En déduire l'expression de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(a+kb)$

Exercice 4:

1. Simplifier $(1+j)^5$ et $\dfrac{1}{(1+j)^4}$ où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$.
3. A l'aide des formules d'Euler, écrire $\sin^3(x) \times \cos(x)$ en fonction de $\sin(4x)$ et $\sin(2x)$.
(méthode dite de linéarisation : transformer du $\cos^n(x)$ et $\sin^n(x)$ en du $\cos(px)$ et $\sin(px)$.
exemple d'intérêt : recherche de primitive ...)

Problème

Première partie : calcul de $\cos\dfrac{\pi}{5}$

1. Rappeler (sous forme trigonométrique) les solutions dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation (E) : $z^5 - 1 = 0$.
2. Factoriser (E) sous la forme $(z-1)Q(z) = 0$, où Q est un polynome de degré 4.
3. Déterminer les racines de Q (un changement de variable pourrait s'avérer utile).
4. En déduire les valeurs exactes des nombres suivants : $\cos\dfrac{\pi}{5}$, $\sin\dfrac{\pi}{5}$, $\cos\dfrac{2\pi}{5}$, $\sin\dfrac{2\pi}{5}$, $\cos\dfrac{4\pi}{5}$ et $\sin\dfrac{2\pi}{5}$ (vous pouvez même ajouter les tangentes si ça vous amuse).

Deuxième partie : calcul de $\cos\dfrac{\pi}{17}$

Pour tous réels a et h, et pour tout entier n, on pose $C_n(a,h) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kh)$ et $S_n(a,h) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin(a+kh)$. On note par ailleurs pour la suite de l'exercice $\theta = \dfrac{\pi}{17}$.

1. Calculer ces deux sommes dans le cas où $\sin\dfrac{h}{2} = 0$.
2. Dans le cas contraire, prouver que $C_n(a,h) = \dfrac{\sin\dfrac{nh}{2}\cos\left(a+(n-1)\frac{h}{2}\right)}{\sin\frac{h}{2}}$

   et $S_n(a,h) = \dfrac{\sin\dfrac{nh}{2}\sin\left(a+(n-1)\frac{h}{2}\right)}{\sin\frac{h}{2}}$.
3. On pose $x_1 = \cos(3\theta)+\cos(5\theta)+\cos(7\theta)+\cos(11\theta)$ et $x_2 = \cos\theta+\cos(9\theta)+\cos(13\theta)+\cos(15\theta)$. Montrer que $x_1 > 0$.
4. Calculer la somme $x_1 + x_2$ (assez facile).
5. Calculer le produit $x_1 x_2$ (beaucoup plus pénible, n'hésitez pas à faire des calculs violents).
6. En déduire les valeurs exactes de x_1 et de x_2.

7. On pose maintenant $y_1 = \cos(3\theta) + \cos(5\theta)$; $y_2 = \cos(7\theta) + \cos(11\theta)$; $y_3 = \cos\theta + \cos(13\theta)$ et $y_4 = \cos(9\theta) + \cos(15\theta)$. Calculer les produits $y_1 y_2$ et $y_3 y_4$.
8. En déduire les valeurs exactes de y_1, y_2, y_3 et y_4.
9. Calculer le produit $\cos\theta\cos(13\theta)$ et en déduire une méthode pour obtenir une valeur exacte de $\cos\theta$ (pour les plus ~~masochistes~~ courageux, finir les calculs et donner cette valeur).

Quelques compléments pour votre culture

Les calculs effectués dans ce devoir à la maison n'ont rien d'anodin et sont même étroitement liés à un des grands problèmes qui ont tenu en haleine les mathématiciens pendant quelques siècles : la construction de figure à la règle et au compas, et ici plus particulièrement la construction de polygones réguliers à la règle et au compas. On peu en fait montrer (mais c'est un peu trop pointu pour vous pour l'instant) que le polygone régulier à n côtés peut être construit à la règle et au compas si et seulement si le nombre $\cos\dfrac{\pi}{n}$ peut s'eprimer à partir de nombres rationnels en utilisant seulement les opérations élémentaires et l'extraction de racines carrées. Nous venons donc de prouver que les polygones à 5 et à 17 côtés sont constructibles à la règle et au compas. En fait, à part ceux-ci, seuls les polygones à 2, 3, 257 et 65537, et tous ceux dont le nombre de côtés est le produit d'un de ceux-ci par une puissance de 2, sont constructibles à la règle et au compas. Une construction très élégante du polygone à 17 côtés est due à Gauss.

Problème Corrigé

Première partie : calcul de $\cos\frac{\pi}{5}$

1. C'est du cours : les solutions sont 1, $e^{2i\frac{\pi}{5}}$, $e^{4i\frac{\pi}{5}}$, $e^{6i\frac{\pi}{5}}$ et $e^{8i\frac{\pi}{5}}$.
2. Posons $Q(z) = az^4+bz^3+cz^2+dz+e$, donc $(z-1)Q(z) = az^5+(b-a)z^4+(c-b)z^3+(d-c)z^2+(e-d)z-e$. Par identification, ce dernier polynome est égal à z^5-1 si $a=b=c=d=e=1$, donc $Q(z) = z^4+z^3+z^2+z+1$.
3. Lorsque les coeffidients d'un polynome sont symétriques, le changement de variables $Z = z+\frac{1}{z}$ est utile. En effet, on a alors $Z^2 = \left(z+\frac{1}{z}\right)^2 = z^2+\frac{1}{z^2}+2$. Prenons l'équation $Q(z) = 0$ et divisons tout par z^2 (on peut car 0 n'est pas une racine), on obtient $z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2} = 0$, soit $Z^2+Z-1 = 0$. Ce trinome a pour discriminant $\Delta = 1+4 = 5$, donc deux solutions réelles $Z_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $Z_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.
   Reste à en déduire les valeurs de z. Si $z+\frac{1}{z} = Z_1$, en multipliant par z, on obtient $z^2-Z_1z+1 = 0$. Le discriminant de ce trinome est $Z_1^2-4 = 1-Z_1-4 = -Z_1-3 = \frac{-5-\sqrt{5}}{2}$ (puisque $Z_1^2+Z_1-1 = 0$). On en déduit les deux solutions $z_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+i\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}+i\frac{5+\sqrt{5}}{8}$, et $z_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}-i\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$. De même, si $z+\frac{1}{z} = Z_2$, z sera solution d'une équation de degré 2 avec discriminant $-Z_2-3 = \frac{\sqrt{5}-5}{2}$, tout aussi négatif que le précédent, et on obtient $z_3 = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}+i\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ et $z_4 = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}-i\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.
   $$\mathcal{S} = \left\{\frac{\sqrt{5}-1}{4}+i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{8}}; \frac{\sqrt{5}-1}{4}-i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{8}}; -\frac{\sqrt{5}+1}{4}+i\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}; -\frac{\sqrt{5}+1}{4}-i\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\right\}$$
4. Parmi les quatre solutions non triviales de l'équation, il y en a une sur chaque quart du cercle trigonométrique ; la détermination des signes de la partie réelle et imaginaire de chaque solution suffit donc à faire l'identification. On a en particulier $e^{i\frac{2\pi}{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}+i\frac{\sqrt{5}+5}{8}$, donc $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$; $\sin\frac{2\pi}{5} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$ et $\tan\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{8}}\frac{4}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$.
   De même, on aura $\cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}$; $\sin\frac{4\pi}{5} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ et $\tan\frac{4\pi}{5} = -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$. Enfin, comme $\frac{4\pi}{5} = \pi-\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$; $\sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ et $\tan\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$.

Deuxième partie : calcul de $\cos \dfrac{\pi}{17}$

1. Si $\sin \dfrac{h}{2} = 0$, c'est que $\dfrac{h}{2} \equiv 0[\pi]$, donc $h \equiv 0[2\pi]$. Mais alors on a , pour tout entier k, $\cos(a+kh) = \cos a$ et $\sin(a+kh) = \sin a$, donc $S_n(a,h) = n\sin a$ et $C_n(a,h) = n\cos a$.
2. Je passe par les complexes car c'est quand même plus agréable : $C_n(a,h) + iS_n(a,h) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{i(a+kh)} = e^{ia}\frac{1-e^{inh}}{1-e^{ih}} = e^{ia}\frac{e^{i\frac{nh}{2}}2i\sin\frac{nh}{2}}{e^{i\frac{h}{2}}2i\sin\frac{h}{2}} = e^{i(a+(n-1)\frac{h}{2})}\frac{\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}}$. Il ne reste plus qu'à prendre les parties réelle et imaginaire pour obtenir les formules demandées.
3. Parmi les quatre cosinus dont x_1 est la somme, seul le dernier est négatif puisque $\dfrac{3\pi}{17} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{5\pi}{17} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $\dfrac{7\pi}{17} \in [0, \frac{\pi}{2}]$. De plus, $\cos\dfrac{11\pi}{17} = -\cos\dfrac{6\pi}{17}$ et $\cos\dfrac{6\pi}{17} < \cos\dfrac{5\pi}{17}$, donc $\cos(5\theta) + \cos(11\theta) > 0$, et x_1, obtenu en ajoutant encore deux termes positifs, est bien positif.
4. La somme $x_1 + x_2$ est exactement de la forme $C_n(a,h)$, avec $a = \theta$, $h = 2\theta$ et $n = 8$. D'après la question 2, on a donc $x_1 + x_2 = \dfrac{\sin(8\theta)\cos(8\theta)}{\sin\theta} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin(16\theta)}{\sin\theta}$. Mais $16\theta = \dfrac{16\pi}{17} = \pi - \theta$, donc $\sin(16\theta) = \sin\theta$ et $x_1 + x_2 = \dfrac{1}{2}$.
5. Il faut y croire :

$$\begin{aligned} x_1x_2 = & \quad \cos(3\theta)\cos\theta + \cos(3\theta)\cos(9\theta) + \cos(3\theta)\cos(13\theta) + \cos(3\theta)\cos(15\theta) \\ + & \quad \cos(5\theta)\cos\theta + \cos(5\theta)\cos(9\theta) + \cos(5\theta)\cos(13\theta) + \cos(5\theta)\cos(15\theta) \\ + & \quad \cos(7\theta)\cos\theta + \cos(7\theta)\cos(9\theta) + \cos(7\theta)\cos(13\theta) + \cos(7\theta)\cos(15\theta) \\ + & \quad \cos(11\theta)\cos\theta + \cos(11\theta)\cos(9\theta) + \cos(11\theta)\cos(13\theta) + \cos(11\theta)\cos(15\theta) \end{aligned}$$

   On utilise les formules de transformation produit/somme et on obtient x_1x_2, comme sommes des cosinus des 32 angles suivants (on peut oublier les signes puisques le cos est pair) : 4θ, 2θ, 12θ, 6θ, 16θ, 10θ, 18θ, 12θ, 6θ, 4θ, 14θ, 4θ, 18θ, 8θ, 20θ, 10θ, 8θ, 6θ, 16θ, 2θ, 20θ, 6θ, 22θ, 8θ, 12θ, 10θ, 20θ, 2θ, 24θ, 2θ, 26θ et 4θ. Or, $26\theta \equiv -8\theta[2\pi]$, donc $\cos(26\theta) = \cos(8\theta)$. De même, $\cos(24\theta) = \cos(10\theta)$, $\cos(22\theta) = \cos(12\theta)$, $\cos(20\theta) = \cos(14\theta)$ et $\cos(18\theta) = \cos(16\theta)$. En regroupant tout ceci, on obtient $x_1x_2 = 2(\cos(2\theta) + \cos(4\theta) + \cos(6\theta) + \cos(8\theta) + \cos(10\theta) + \cos(12\theta) + \cos(14\theta) + \cos(16\theta))$. La parenthèse vaut $C_8(2\theta, 2\theta) = \dfrac{\sin(8\theta)\cos(9\theta)}{\sin\theta}$, avec $\cos(9\theta) = \cos(\frac{\pi}{2} - 8\theta) = -\cos(8\theta)$, d'où $x_1x_2 = -2(x_1 + x_2) = -1$.
6. On connait la somme et le produit de x_1 et x_2, ils sont solution de l'équation $x^2 - \dfrac{1}{2}x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 2 = 0$, de discriminant $1 + 16 = 17$. Comme on l'a vu plus haut, $x_1 > 0$, donc on a $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{17}}{4}$ et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{17}}{4}$.
7. Allons-y : $y_1y_2 = \cos(3\theta)\cos(7\theta) + \cos(3\theta)\cos(11\theta) + \cos(5\theta)\cos(7\theta) + \cos(5\theta)\cos(11\theta) = \dfrac{1}{2}(\cos(10\theta) + \cos(4\theta) + \cos(14\theta) + \cos(8\theta) + \cos(12\theta) + \cos(2\theta) + \cos(16\theta) + \cos(6\theta)) = \dfrac{1}{4}x_1x_2 = -\dfrac{1}{4}$.

   De même, $y_3y_4 = \cos\theta\cos(9\theta) + \cos\theta\cos(15\theta) + \cos(13\theta)\cos(9\theta) + \cos(13\theta)\cos(15\theta) = \dfrac{1}{2}(\cos(10\theta) + \cos(8\theta) + \cos(16\theta) + \cos(14\theta) + \cos(22\theta) + \cos(4\theta) + \cos(28\theta) + \cos(2\theta)) = -\dfrac{1}{4}$ (après simplifications similaires à celles faites pour x_1x_2).
8. y_1 et y_2 ayant pour somme x_1 et produit $-\dfrac{1}{4}$, ils sont solutions de l'équation $x^2 - x_1x - \dfrac{1}{4}$, donc le discriminant vaut $x_1^2 + 1 = \dfrac{1}{2}x_1 + 2 = \dfrac{17+\sqrt{17}}{8}$ et les solutions $\dfrac{1+\sqrt{17} \pm \sqrt{34+2\sqrt{17}}}{8}$.

La solution positive est égale à y_1, car y_2 est somme de deux cosinus négatifs. De même, on obtient $y_3 = \dfrac{1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}$ et $y_4 = \dfrac{1-\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}$.

9. De plus en plus facile : $\cos\theta\cos(13\theta) = \dfrac{1}{2}(\cos(14\theta)+\cos(12\theta)) = \dfrac{1}{2}(-\cos(5\theta)-\cos(3\theta)) = -\dfrac{y_1}{2}$. Comme de plus $\cos\theta+\cos(13\theta) = y_3$, les réels $\cos\theta$ et $\cos(13\theta)$ sont solutions de l'équation $x^2 - y_3 x - \dfrac{y_1}{2}$, $\cos\theta$ étant la solution positive. Le discriminant de l'équation vaut $y_3^2 + 2y_1 = \dfrac{1+17+34-2\sqrt{17}-2\sqrt{17}+2\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{578-34\sqrt{17}}}{64} + \dfrac{1+\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4} = \dfrac{68+12\sqrt{17}+2\sqrt{34-2\sqrt{17}}+16\sqrt{34+2\sqrt{17}}-2\sqrt{578-34\sqrt{17}}}{64}$ et on a ensuite $\cos\dfrac{\pi}{17} =$
$$\frac{1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\sqrt{68+12\sqrt{17}+2\sqrt{34-2\sqrt{17}}+16\sqrt{34+2\sqrt{17}}-2\sqrt{578-34\sqrt{17}}}}{16}$$
Étonnant, non ?