DEVOIR SURVEILLÉ N° 3

Concours Blanc Math-Info

Suites & Matrices

Durée : 4 heures

Documents & Calculatrices Interdits

Questions de math et celles d'infos à rédiger séparèmment

Exercice 1. Le but de l'exercice est de résoudre l'équation $M^3 = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ où A est la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -10 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

On définit de plus la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. ***Question préliminaire*** – Soient α, β et γ trois réels distincts.
   Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec la matrice $\operatorname{diag}(\alpha, \beta, \gamma)$.
2. (a) Montrer que la matrice P est inversible et calculer P^{-1}.
   (b) On pose alors $D = P^{-1}AP$. Calculer la matrice D.
3. ***Analyse*** – Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice solution de l'équation c'est-à-dire vérifiant $M^3 = A$.
   (a) Montrer que A et M commutent.
   (b) En déduire que $P^{-1}MP$ et D commutent.
   (c) Justifier alors que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale. On note alors Δ cette matrice diagonale.
   (d) Vérifier que $\Delta^3 = D$ et déterminer explicement Δ.
   (e) Déterminer alors M.
4. ***Synthèse*** – Conclure.

Exercice 2. Résoudre les deux systèmes suivants, le réel m étant un paramètre :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x + y - z & = & 2 \\ x - y + z & = & 4 \\ 5x + y - z & = & m \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x - y + z & = & m \\ x + my - z & = & 1 \\ x - y - z & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 3 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite strictement croissante et convergente vers une limite ℓ. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n < \ell.$$

On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers un même réel. On note ℓ leur limite commune.
2. Écrire un programme en `Python` permettant de calculer u_{50} et v_{50}. Exécuter le programme et conjecturer la valeur de ℓ.
   Remarque : on admet pour l'instant ce résultat, il sera démontré plus tard dans l'année.
3. On souhaite montrer que ℓ est un nombre irrationnel.
   (a) Justifier que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n < \ell < v_n.$$
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n!u_n$ et $n!v_n$ sont deux entiers consécutifs.
   (c) Conclure.

Exercice 4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{9}$. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R}_+ \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Écrire une fonction `u(n,u_0)` en `Python` permettant de calculer u_n pour $n \in \mathbb{N}$ (en fonction de `n` et de `u_0`).
2. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Quelles sont les limites finies éventuelles de la suite (u_n) ?
4. (a) Justifier que si $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ alors $f(x) \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$.
   (b) En déduire que si $u_0 \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$.
   (c) En déduire le comportement asymptotique de la suite (u_n) lorsque $u_0 \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$.
   (d) Écrire une fonction `premier_rang(u_0,epsilon)` en `Python` permettant de calculer le premier rang $n_0 \in \mathbb{N}$ pour lequel $\left|u_n - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$ (en fonction de `epsilon` appartenant à $\mathbb{R}_+^*$ et d'un réel `u_0` appartenant à $\left[0, \frac{1}{3}\right]$).
   On rappelle que, pour tout réel x, l'instruction `abs(x)` permet de calculer $|x|$.
5. Étudier le comportement asymptotique de la suite (u_n) lorsque :
   (a) $u_0 = \frac{2}{3}$,
   (b) $u_0 \in \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$.

Exercice 5 Soit (x_n) une suite réelle convergente vers un réel ℓ. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

1. *Étude du cas où la suite (x_n) est croissante*
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n \leq x_n$
   (b) Montrer que la suite (y_n) est croissante.
   (c) En déduire que la suite (y_n) converge.
   (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_{2n} \geq \frac{x_n+y_n}{2}$.
   (e) En déduire que la suite (y_n) converge vers ℓ.

On admet pour la suite que le résultat précédent reste vrai sans l'hypothèse de croissance de la suite (x_n).

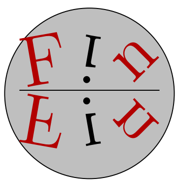
2. On considère la suite (u_n) définie par :

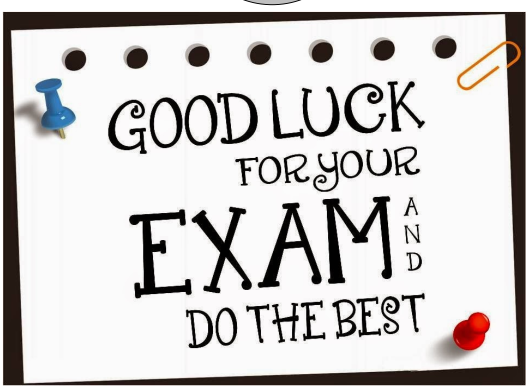
$$u_0 \in [0, 1[\text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$$

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1[$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) converge.
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
   (d) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1 - u_n$ et $w_n = \dfrac{1}{v_{n+1}} - \dfrac{1}{v_n}$.
      i. Justifier que la suite (w_n) est bien définie.
      ii. Compléter les fonctions suivantes afin qu'elles revoient u_n puis w_n pour $n \in \mathbb{N}$ dans le cas où $u_0 = \frac{1}{2}$.

```
def suite_u(n) :
    u = ...
    for k ....
        ......
    return ...
def suite_w(n):
    return .....
```

      iii. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{1}{1+u_n}$.
      iv. En déduire que la suite (w_n) converge et calculer sa limite.
      v. En déduire, si elle existe, la limite de la suite (nv_n).





Proposition de solutions

Solution 1 1. ***Question préliminaire*** – On pose

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

On calcule $B\text{diag}(\alpha,\beta,\gamma)$ et $\text{diag}(\alpha,\beta,\gamma)B$ et l'on montre (en raisonnant par équivalences) que

$$B\text{diag}(\alpha,\beta,\gamma) = \text{diag}(\alpha,\beta,\gamma)B \iff \left\{\begin{array}{rcl} \beta b & = & \alpha b \\ \gamma c & = & \alpha c \\ \alpha d & = & \beta d \\ \gamma f & = & \beta f \\ \alpha g & = & \gamma g \\ \beta h & = & \gamma h \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} b & = & 0 \\ c & = & 0 \\ d & = & 0 \\ f & = & 0 \\ g & = & 0 \\ h & = & 0 \end{array}\right.,$$

la dernière équivalence découlant de ce que les trois réels α, β et γ sont distincts.
Ainsi l'ensemble cherché est l'ensemble des matrices diagonales.

2. (a) Méthode habituelle par résolution de système linéaire. On trouve que P est inversible et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   (b) On trouve que $D = \text{diag}(8,0,1)$.

3. ***Analyse*** –
   (a) On peut écrire $AM = M^3M = M^4 = MM^3 = MA$.
   (b) On en déduit alors que

$$P^{-1}MPD = P^{-1}MPP^{-1}AP = P^{-1}(MA)P = P^{-1}(AM)P = P^{-1}APP^{-1}MP = DP^{-1}MP.$$

   (c) La matrice $P^{-1}MP$ commute avec $D = \text{diag}(8,0,1)$. D'après la question préliminaire, comme les trois réels 8, 0 et 1 sont distincts, la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale.
   Attention : Ne pas oublier de dire que les trois réels 8, 0 *et* 1 *sont distincts, ce qui est important pour pouvoir utiliser la question 1.*
   (d) Comme $\Delta = P^{-1}MP$ alors $\Delta^3 = P^{-1}M^3P = P^{-1}AP = D$.
   Posons alors $\Delta = \text{diag}(a,b,c)$. Alors $\Delta^3 = \text{diag}(a^3,b^3,c^3)$. Donc

$$\text{diag}(a^3,b^3,c^3) = \text{diag}(8,0,1).$$

   On en déduit que $a^3 = 8$ i.e. $a = 2$. De même $b = 0$ et $c = 1$.
   (e) Comme $\Delta = P^{-1}MP$ alors $M = P\Delta P^{-1}$. En explicitant les trois matrices et en faisant un calcul de produit de trois matrices, on trouve

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. ***Synthèse*** – On pose M comme à la question précédente et on calcule M^3. On trouve bien A.

Solution 4 1.

```
def calcul_u(n,u_0):
    u=u_0
    for k in range (n):
        u=u**2+2/9
    return u
```

2. On vérifie immédiatement que la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
3. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et la suite (u_n) est définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ donc d'après le théorème du point fixe sa limite ℓ (si elle existe) vérifie $\ell = f(\ell)$. Or
$$\ell = f(\ell) \Longleftrightarrow \ell = \ell^2 + \frac{2}{9} \Longleftrightarrow \ell^2 - \ell - \frac{2}{9} = 0$$
La méthode usuelle de résolution d'une équation de degré donne $\ell = \frac{1}{3}$ ou $\ell = \frac{2}{3}$.
Conclusion : $\boxed{\text{les limites finies éventuelles de la suite } (u_n) \text{ sont } \frac{1}{3} \text{ et } \frac{2}{3}.}$
4. (a) La fonction f est croissante sur $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ donc si $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ alors $f(x) \in \left[f(0), f\left(\frac{1}{3}\right)\right]$, autrement dit $f(x) \in \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]$. Comme $\left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \subset \left[0, \frac{1}{3}\right]$ on a bien :
Conclusion : $\boxed{\text{si } x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \text{ alors } f(x) \in \left[0, \frac{1}{3}\right].}$
(b) Une récurrence immédiate (non détaillée ici) assure le résultat.
(c) Étudions les variations de la suite (u_n) : pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n - \frac{2}{9}$$
Les calculs de la question 3 et les propriétés des trinômes assurent que, pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$, $x^2 - x - \frac{2}{9} \geq 0$. Or, d'après la question précédente, $u_n \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 - u_n - \frac{2}{9} \geq 0$, donc la suite (u_n) est croissante.
De plus elle est majorée par $\frac{1}{3}$ donc d'après le théorème de limite monotone elle converge. En notant ℓ sa limite, on a, par conservation des inégalités larges par passage à la limite, $\ell \leq \frac{1}{3}$.
Donc, d'après la question 3, $\ell = \frac{1}{3}$.
Conclusion : $\boxed{\text{si } u_0 \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \text{ alors la suite } (u_n) \text{ converge vers } \frac{1}{3}.}$
(d) Une première solution, utilisant la fonction `calul_u` définie à la question 1 :

```
def premier_rang(u_0,epsilon):
    n=0
    while abs(calcul_u(n,u_0)-1/3)>=epsilon:
        n=n+1
    return n
```

Ou directement, peut-être un peu moins élégant mais beaucoup plus efficace en temps de calcul (pourquoi, réfléchissez-y !) :

```
def premier_rang_bis(u_0,epsilon):
    n=0
    u=u_0
    while abs(u-1/3)>=epsilon:
        n=n+1
        u=u**2+2/9
    return n
```

5. (a) Si $u_0 = \frac{2}{3}$ alors une récurrence immédiate assure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2}{3}$, donc la suite (u_n) converge vers $\frac{2}{3}$.
(b) Si $u_0 \in \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$, on reprend le plan d'étude de la question 4 :
   i. on commence par montrer, en utilisant les variations de f, que si $x \in \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$ alors $f(x) \in \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$.
   ii. une récurrence immédiate assure alors que $u_n \in \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   iii. on étudie les variations de la suite (u_n) : pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n - \frac{2}{9}$$
Les calculs de la question 3 et les propriétés des trinômes assurent que, pour tout $x \in \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$, $x^2 - x - \frac{2}{9} \geq 0$. Or, d'après la question précédente, $u_n \in \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 - u_n - \frac{2}{9} \geq 0$, donc la suite (u_n) est croissante.

iv. supposons maintenant que la suite (u_n) converge : en notant ℓ sa limite, on a, d'après la question 3, $\ell = \frac{1}{3}$ ou $\ell = \frac{2}{3}$. Pourtant la suite (u_n) est croissante donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_0 > \frac{2}{3}$, donc par conservation des inégalités larges par passage à la limite, $\ell \geq u_0 > \frac{2}{3}$. On aboutit donc à une contradiction. Donc la suite (u_n) diverge. Comme en outre elle est croissante on peut conclure.

Conclusion : $\boxed{\text{si } u_0 \in \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[\text{ alors la suite } (u_n) \text{ diverge vers } +\infty.}$

Solution 5 1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La suite (x_n) est croissante donc pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $x_k \leq x_n$. En sommant pour k variant de 1 à n, on a donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \leq n x_n$. Donc comme $n > 0$, $y_n \leq x_n$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$y_{n+1} = \frac{(x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_n) + x_{n+1}}{n+1} = \frac{n y_n + x_{n+1}}{n+1}.$$

Donc

$$y_{n+1} - y_n = \frac{n y_n + x_{n+1}}{n+1} - \frac{(n+1) y_n}{n+1} = \frac{x_{n+1} - y_n}{n+1} \geq \frac{x_n - y_n}{n+1} \geq 0$$

d'après la question 1.

Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (y_n) \text{ est croissante.}}$

(c) La suite (x_n) est croissante et a pour limite ℓ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \leq \ell$. Donc d'après la question 1(a), $y_n \leq \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a en outre montré à la question précédente que la suite (y_n) est croissante.

Conclusion : $\boxed{\text{d'après le théorème de limite monotone la suite } (y_n) \text{ converge.}}$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} y_{2n} &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} x_k \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=n+1}^{2n} x_k}{2n} \\ &= \frac{n y_n + \sum_{k=n+1}^{2n} x_k}{2n} \end{aligned}$$

Or, par croissance de la suite (x_n), $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} x_k \geq \sum_{k=n+1}^{2n} x_n = n x_n$. En simplifiant par $n > 0$, on a bien :

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ y_{2n} \geq \frac{x_n + y_n}{2}.}$

(e) Notons ℓ' la limite de la suite (y_n). On a tout d'abord, d'après la question 1(c), $y_n \leq \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc par conservation des inégalités par passage à la limite, $\ell' \leq \ell$.
En reprenant le résultat de la question 1(d), on a également, par conservation des inégalités par passage à la limite, $\ell' \geq \frac{\ell + \ell'}{2}$, donc $\ell' \geq \ell$.

Conclusion : $\boxed{\ell' = \ell \text{ et la suite } (y_n) \text{ converge vers } \ell.}$

2. (a) Raisonnons par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: "$u_n \in [0, 1[$".
Initialisation : d'après l'énoncé $u_0 \in [0, 1[$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : soit $n \geq 0$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a donc $u_n \in [0, 1[$. La fonction racine carrée étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (donc en particulier sur $[0, 1[$), $u_n^2 \in [0, 1[$, donc $\frac{u_n^2 + 1}{2} \in [0, 1[$, i.e. $u_{n+1} \in [0, 1[$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\boxed{\text{d'après le principe de récurrence, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0, 1[.}$

(b) Étudions les variations de la suite (u_n) : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + 1}{2} - u_n = \frac{u_n^2 + 1 - 2u_n}{2} = \frac{(u_n - 1)^2}{2} \geq 0$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, donc la suite (u_n) est croissante.
De plus elle est majorée par 1 donc d'après le théorème de limite monotone elle converge vers une limite réelle notée ℓ.

(c) On note $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{x^2 + 1}{2}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et la suite (u_n) est définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ donc d'après le théorème du point fixe sa limite ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$. Or

$$\ell = f(\ell) \Longleftrightarrow \ell = \frac{\ell^2 + 1}{2} \Longleftrightarrow \frac{(\ell - 1)^2}{2} = 0 \Longleftrightarrow \ell = 1$$

Conclusion : $\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1.}$

(d) i. D'après la question 2(a), $u_n \in [0,1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1 - u_n \in]0,1]$. En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$. Donc la suite (w_n) est bien définie.

ii.
```
def suite_u(n) :
   u=0.5
   for k in range(n):
      u=(u**2+1)/2
   return u
def suite_w(n):
   return 1/(1-suite_u(n+1))-1/(1-suite_u(n))
```

iii. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
w_n &= \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} \\
&= \frac{1}{1-u_{n+1}} - \frac{1}{1-u_n} \\
&= \frac{1}{1-\frac{u_n^2+1}{2}} - \frac{1}{1-u_n} \\
&= \frac{1}{\frac{2-(u_n^2+1)}{2}} - \frac{1}{1-u_n} \\
&= \frac{2}{1-u_n^2} - \frac{1}{1-u_n} \\
&= \frac{2}{(1-u_n)(1+u_n)} - \frac{1}{1-u_n} \\
&= \frac{2}{(1-u_n)(1+u_n)} - \frac{1+u_n}{(1-u_n)(1+u_n)} \\
&= \frac{2-1-u_n}{(1-u_n)(1+u_n)} \\
&= \frac{1}{1+u_n}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ w_n = \frac{1}{1+u_n}.}$

iv. D'après la question 2(c), $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc par théorème d'opérations sur les limites, $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.

v. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k$.

La suite (w_n) converge vers $\frac{1}{2}$ donc d'après la question 1 la suite (w_n) converge elle aussi vers $\frac{1}{2}$ (la remarque de la fin de la question 1 assure que ce résultat reste vrai même sans l'hypothèse de croissance de (w_n)).

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$z_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{v_{k+1}} - \frac{1}{v_k}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_0}\right) \text{ (par télescopage)}$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n = \frac{1}{nv_{n+1}} - \frac{1}{nv_0}$. Donc $\frac{1}{nv_{n+1}} = z_n + \frac{1}{nv_0}$, donc $nv_{n+1} = \frac{1}{z_n + \frac{1}{nv_0}}$. Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = \frac{1}{n\left(z_n+\frac{1}{nv_0}\right)}$. Ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc en remplaçant n par $n-1$ on a : pour tout $n \geq 2$, $v_n = \frac{1}{(n-1)\left(z_{n-1}+\frac{1}{(n-1)v_0}\right)}$, donc $nv_n = \frac{n}{(n-1)\left(z_{n-1}+\frac{1}{(n-1)v_0}\right)}$.

Il est clair que $\frac{1}{(n-1)v_0} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et on a $z_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$ et $\frac{n}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Conclusion : $\boxed{\text{par théorème d'opérations sur les limites, } nv_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2.}$