Devoir Surveillé N°4

Matrices & Probabilités

Durée : 4 heures

Exercices

Exercice 1 Polynôme annulateur

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $A^3 - A^2 + 2A + 11I_3 = 0_3$.
   (b) En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.
2. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ la matrice carrée définie par $a_{i,i} = 0$ et $a_{i,j} = 1$ si $i \neq j$.
   (a) Quelle est la matrice $A + I_4$? Calculer alors $(A + I_4)^2$.
   (b) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 6A$. En déduire que A n'est pas inversible.

Exercice 2 Diagonalisation

Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -6 & 4 & -6 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
2. Montrer que la matrice $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
3. Déterminer D^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Informatique: Ecrire un programme python qui : demande à l'utilisateur de saisir n, définit la valeur de A et P, calcule D et affiche la valeur de An

Exercice 3 Une urne U_1 contient 3 boules blanches et 4 noires, et une urne U_2 contient 4 boules blanches et 3 noires. On effectue n tirages (avec $n \in \mathbb{N}^*$) dans les conditions suivantes :

- tous les tirages se font avec remise ;
- on effectue un premier tirage dans U_1 ;
- si un tirage donne une boule blanche le tirage suivant se fait dans U_1, sinon il se fait dans U_2.

On note p_n la probabilité d'obtenir une boule blanche au n-ième tirage.

1. Déterminer p_{n+1} en fonction de p_n.
2. En déduire la valeur de p_n pour tout $n \geqslant 1$.

Exercice 4 *Exceptionnellement, on pourra utiliser la calculatrice.*
Une maladie touche 20% de la population d'un pays. Lors d'un dépistage de la maladie, on utilise un test biologique qui a les caractéristiques suivantes :

- lorsque la personne est malade, la probabilité d'avoir un test positif est 0,70.
- lorsque la personne n'est pas malade, la probabilité d'avoir un test négatif est 0,95.

On choisit une personne au hasard dans cette population. On appelle valeur prédictive positive du test (VPP), la probabilité qu'une personne soit malade sachant que le test est positif. On estime que ce test est efficace pour une population donnée lorsque cette probabilité est supérieure à 0,95.

1. Calculer la valeur prédictive positive de ce test. Ce test est-il efficace sur la population étudiée ?
2. Mêmes questions en supposant cette fois que 60% des personnes sont touchées.

Problème

Partie I : calcul matriciel

On considère les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & -9 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que P est inversible et préciser la matrice P^{-1}, puis exprimer P^{-1} en fonction de Q.
2. Montrer que $D = \frac{1}{6} QMP$ est une matrice diagonale que l'on calculera.
3. Exprimer M en fonction de D, Q et P puis montrer que M est inversible et exprimer M^{-1} à l'aide de Q et P.
4. Déterminer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Établir que pour tout entier naturel n, on a :
$$M^n = \frac{1}{6} P D^n Q$$
6. Justifier que la première colonne de la matrice M^n est :
$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5^n - 2^{n+2} + 9 \\ 2(5^n - 2^n) \\ 3(5^n + 2^{n+1}) - 9 \end{pmatrix}.$$
7. Informatique: Écrire une fonction python qui prend en paramètre un entier n, calcule et retourne la

Partie II : étude de l'entraînement d'un athlète au triathlon

Les trois sports du triathlon sont : la natation, le cyclisme et la course à pied.
Un athlète décide de pratiquer un sport par jour pour s'entraîner au triathlon. Il commence son entraînement par la natation, au jour 0.
Son entraînement obéit ensuite aux règles suivantes (valables pour tout entier naturel n) :

- si l'athlète a pratiqué la natation le jour n, alors il pratiquera au jour $n+1$:
  - la natation avec probabilité $1/5$
  - le cyclisme avec probabilité $1/5$
  - la course à pied avec probabilité $3/5$
- si l'athlète a pratiqué le cyclisme le jour n, alors il pratiquera au jour $n+1$:
  - la natation avec probabilité $2/5$
  - le cyclisme avec probabilité $3/5$
- si l'athlète a pratiqué la course à pied le jour n, alors il pratiquera au jour $n+1$:
  - le cyclisme avec probabilité $1/5$
  - la course à pied avec probabilité $4/5$

Pour tout entier naturel n, on désigne par :

- A_n l'évènement « l'athlète s'entraîne à la natation le jour n » et par a_n la probabilité de A_n.
- B_n l'évènement « l'athlète s'entraîne au cyclisme le jour n » et par b_n la probabilité de B_n.
- C_n l'évènement « l'athlète s'entraîne à la course à pied le jour n » et par c_n la probabilité de C_n.

7. Déterminer a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1.

8. Calculer la probabilité pour qu'il enchaîne natation - course à pied - cyclisme - natation (dans cet ordre) les 4 premiers jours.

9. On suppose, pour cette question seulement, que l'athlète a fait du cyclisme le jour numéro 2. Quelle est la probabilité qu'il ait fait de la natation le jour numéro 1 ?

10. Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que pour tout entier naturel n on a :

$$a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n.$$

Déterminer de même les probabilités b_{n+1} et c_{n+1} en fonction des probabilités a_n, b_n et c_n. *On attend une justification précise.*

11. **Parenthèse informatique**. Écrire une fonction python `Probas(n)` qui, étant donné $n \in \mathbb{N}$, renvoie la liste $[a_n, b_n, c_n]$.

12. Déterminer la matrice A telle que, pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

et exprimer A en fonction de la matrice M de la partie I.

13. En déduire alors l'expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

14. Déterminer les limites des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice Bonus

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On dispose d'une pièce donnant "Pile" avec la probabilité $p \in]0,1[$ et "Face" avec la probabilité $q = 1-p$.
On lance la pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :
• Soit si l'on a obtenu "Pile" .
• Soit si l'on a obtenu n fois "Face".
On note T_n le nombre de lancers effectués, X_n le nombre de "Pile" obtenus et enfin Y_n le nombre de "Face" obtenus.
On admet que T_n, X_n et Y_n sont des variables aléatoires toutes les trois définies sur un espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; P)$ que l'on ne cherchera pas à préciser.

1. (a) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, déterminer, en distinguant le cas $k = n$, la probabilité de $P(T_n = k)$.
   (b) Vérifier par le calcul que $\sum\limits_{k=1}^{n} P(T_n = k) = 1$.
   (c) Montrer que pour $x \neq 1$, $\sum\limits_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} = \frac{1-nx^{n-1}+x^n(n-1)}{(1-x)^2}$.
   (d) Etablir que T_n admet une espérance et vérifier que $E(T_n) = \frac{1-q^n}{1-q}$.
2. Donner la loi de X_n et vérifier que $E(X_n) = 1 - q^n$.
3. (a) Donner la loi de Y_n.
   (b) Ecrire une égalité liant les variables aléatoires T_n , X_n et Y_n puis en déduire $E(Y_n)$.

Fin

Exercice 1 **Polynôme annulateur**

1) a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 8 \\ -2 & 4 & 3 \\ -3 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 8 \\ -2 & 4 & 3 \\ -3 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -1 & 2 \\ -4 & -5 & 1 \\ 1 & -6 & -17 \end{pmatrix}$$

Donc

$$A^3 - A^2 + 2A + 11 I_3 = \begin{pmatrix} -16 & -1 & 2 \\ -4 & -5 & 1 \\ 1 & -6 & -17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 3 & 8 \\ -2 & 4 & 3 \\ -3 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$+ 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 11 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

1 b) On a :

$$A^3 - A^2 + 2A = -11 I_3$$

donc $$-\frac{1}{11} A^3 + \frac{1}{11} A^2 - \frac{2}{11} A = I_3$$

donc $$A\left(-\frac{1}{11} A^2 + \frac{1}{11} A - \frac{2}{11} I_3 \right) = I_3$$

Ainsi A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{11} A^2 + \frac{1}{11} A - \frac{2}{11} I_3$

<u>Calcul</u>

$$A^{-1} = \frac{1}{11}\left(-A^2 + A - 2 I_3 \right)$$

$$= \frac{1}{11}\left(-\begin{pmatrix} -3 & 3 & 8 \\ -2 & 4 & 3 \\ -3 & -4 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 3 & -7 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>Remarque</u> : avec la méthode du pivot.

Soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$AX = B \iff \begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ x - y + z = b \\ -2x + y + z = c \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + 3z = a & \\ -3y - 2z = -a + b & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 5y + 7z = 2a + c & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y + 3z = a & \\ y + \frac{2}{3} z = +\frac{1}{3} a - \frac{1}{3} b & L_2 \leftarrow -\frac{1}{3} L_2 \\ 5y + 7z = 2a + c & \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + \frac{5}{3} z = \frac{1}{3} a + \frac{2}{3} b & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ y + \frac{2}{3} z = \frac{1}{3} a - \frac{1}{3} b & \\ \frac{11}{3} z = \frac{1}{3} a + \frac{5}{3} b + c & L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{2}{11} a - \frac{1}{11} b - \frac{5}{11} c \\ y = \frac{3}{11} a - \frac{7}{11} b - \frac{2}{11} c \\ z = \frac{1}{11} a + \frac{5}{11} b + \frac{3}{11} c \end{cases}$$

Donc pour tout $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, le système $AX = B$ admet une unique solution. Ainsi A est inversible.

De plus la solution est

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{11}a - \frac{1}{11}b - \frac{5}{11}c \\ \frac{3}{11}a - \frac{7}{11}b - \frac{2}{11}c \\ \frac{1}{11}a + \frac{5}{11}b + \frac{3}{11}c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & -\frac{5}{11} \\ \frac{3}{11} & -\frac{7}{11} & -\frac{2}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{5}{11} & \frac{3}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & -\frac{5}{11} \\ \frac{3}{11} & -\frac{7}{11} & -\frac{2}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{5}{11} & \frac{3}{11} \end{pmatrix}$$

2 a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A + I_4)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 4(A + I_4)$$

2b) On a

$$A^2 + 2A I_4 + I_4^2 = 4A + 4 I_4 \quad (\text{car } A I_4 = I_4 A)$$

donc $A^2 - 2A = 3 I_4$

donc $\frac{1}{3} A^2 - \frac{2}{3} A = I_4$

donc $A\left(\frac{1}{3} A - \frac{2}{3} I_4\right) = I_4$ et ainsi A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{3} A - \frac{2}{3} I_4$

$$= \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

3) $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & -12 & 6 \\ -12 & 12 & 12 \\ 6 & 12 & 30 \end{pmatrix}$

$= 6A$

Supposons, par l'absurde, que A est inversible.

$A^2 = 6A$ donc $A^2 A^{-1} = 6 A A^{-1}$ donc $A = 6 I_4$.

Absurde. Donc A n'est pas inversible.

Exercice 2 **Diagonalisation**

1) Soient $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$PX = B \iff \begin{cases} x + y - z = a \\ y + z = b \\ -x + z = c \end{cases}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_3}{\iff} \begin{cases} y = a + c \\ y + z = b \\ -x + z = c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = a + c \\ z = -a + b - c \\ x = -a + b - 2c \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} -a + b - 2c \\ a + c \\ -a + b - c \end{pmatrix}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} B$$

$\forall B \in M_{3,1}(\mathbb{R})$, $PX = B$ admet une unique solution

donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Vérification : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

2) $D = P^{-1} A P = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -6 & 4 & -6 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Donc D est bien diagonale.

3) Puisque D est diagonale, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$$

4) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$A^n = P D^n P^{-1}$$

<u>Initialisation</u> : $A^0 = I_3$ et $P D^0 P^{-1} = P I_3 P^{-1}$

$$= P P^{-1} = I_3$$

Donc $A^0 = P D^0 P^{-1}$

<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = P D^n P^{-1}$.

$$\begin{aligned} P D^{n+1} P^{-1} &= P D^n D P^{-1} \\ &= \underbrace{P D^n P^{-1}}_{= A^n} A P P^{-1} \\ &= A^n . A . I_3 \\ &= A^{n+1} \end{aligned}$$

On peut aussi remarquer que $D = P^{-1} A P$

donc $P D P^{-1} = P P^{-1} A P P^{-1} = A$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = P D^n P^{-1}$.

Il reste à faire le calcul.

$$A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ (-2)^n & 0 & (-2)^n \\ -4^n & 4^n & -4^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 + (-2)^n + 4^n & 1 - 4^n & -2 + (-2)^n + 4^n \\ (-2)^n - 4^n & 4^n & (-2)^n - 4^n \\ 1 - 4^n & -1 + 4^n & 2 - 4^n \end{pmatrix}$$

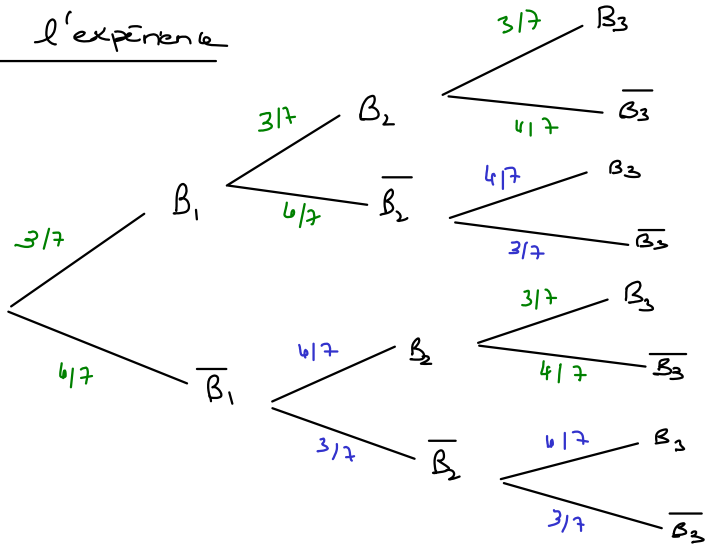
Exercice 3

Notons B_n : " obtenir une boule blanche au n-ième tirage ".

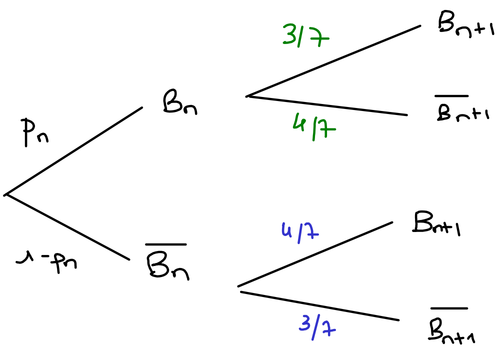
Début de l'expérience

vert : tirages dans U1

bleu : dans U2



Tirages n et $n+1$



$(B_n, \overline{B_n})$ est un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales

$$P(B_{n+1}) = P(B_n)\, P_{B_n}(B_{n+1}) + P(\overline{B_n})\, P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})$$

$$p_{n+1} = p_n \times \frac{3}{7} + (1-p_n) \times \frac{4}{7}$$

$$p_{n+1} = \frac{4}{7} - \frac{1}{7} p_n .$$

2) $(p_n)_{n\geq 1}$ est arithmético-géométrique.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\quad x = \frac{4}{7} - \frac{1}{7}x \iff 7x = 4 - x$

$\iff 8x = 4$

$\iff x = \frac{1}{2}$

Soit $q_n = p_n - \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{4}{7} - \frac{1}{7}p_n - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{14} - \frac{1}{7}\left(q_n + \frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{7} q_n \end{aligned}$$

Donc $(q_n)_{n\geq 1}$ est géométrique de raison $-\frac{1}{7}$ et de premier terme $q_1 = p_1 - \frac{1}{2}$

Or $p_1 = P(B_1) = \frac{3}{7}$. Donc $q_1 = \frac{-1}{14}$

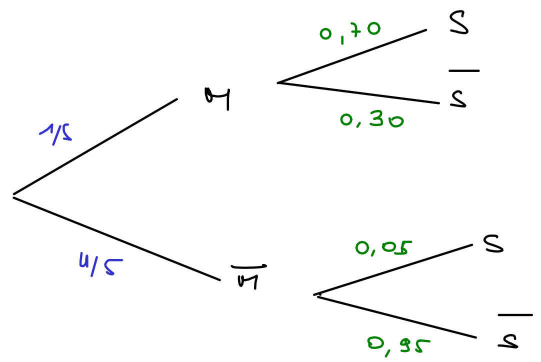
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad q_n = -\frac{1}{14}\left(-\frac{1}{7}\right)^{n-1}$$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{14}\left(-\frac{1}{7}\right)^{n-1}}$

Exercice 4

Notons M : " la personne est malade "

S : " le test est positif "



- $P(M) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

Donc $P(\overline{M}) = 1 - P(M) = \frac{4}{5}$

- $P_M(S) = 0{,}70$

$P_{\overline{M}}(\overline{S}) = 0{,}95$

Donc $P_M(\overline{S}) = 0{,}3$ et $P_{\overline{M}}(S) = 0{,}05$

1) $VPP = P_S(M)$. D'après la formule de Bayes

- $VPP = \dfrac{P(M)\,P_M(S)}{P(S)}$

- Calculons $P(S)$. $(M, \overline{M})$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(S) = P(M)\,P_M(S) + P(\overline{M})\,P_{\overline{M}}(S)$$

$$= \frac{1}{5} \times 0{,}7 + \frac{4}{5} \times 0{,}05$$

$$= 0{,}18$$

Donc $VPP = \dfrac{1/5 \times 0{,}7}{0{,}18} = \dfrac{0{,}14}{0{,}18} \simeq 0{,}78$. pas efficace

2) Si $P(M) = 0{,}6$, alors en reprenant les calculs

$P(S) = 0{,}6 \times 0{,}7 + 0{,}4 \times 0.05 = 0{,}44$

$VPP = \dfrac{0{,}6 \times 0{,}7}{0{,}44} \simeq 0{,}956$ efficace.

Problème

Partie I : calcul matriciel

1. Soient $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$PX = B \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} + y + 2z = a \\ 2x + z = b \\ 3x - y - 3z = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} + y + 2z = a & \\ \boxed{-2y} - 3z = -2a + b & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -4y - 9z = -3a + c & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}b & L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_2 \\ \boxed{-2y} - 3z = -2a + b & \\ -3z = a - 2b + c & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{6}a + \frac{1}{6}b + \frac{1}{6}c \\ y = \frac{3}{2}a - \frac{3}{2}b + \frac{1}{2}c \\ z = -\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b - \frac{1}{3}c \end{cases}$$

Pour tout B il y a une unique solution donc P est inversible et ici on lit :

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}Q}$$

2. Après calculs, $\boxed{D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$ donc est bien diagonale.

3. $D = P^{-1}MP$ donc $PDP^{-1} = PP^{-1}MPP^{-1} = M$. Ainsi, $\boxed{M = \frac{1}{6}PDQ}$. Or, D est diagonale et n'a aucun coefficient diagonal nul donc elle est inversible et $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. De plus, P et P^{-1} sont inversibles donc par produit, M est inversible et $\boxed{M^{-1} = P^{-1}D^{-1}P = \frac{1}{6}Q \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} P.}$

4. D étant une matrice diagonale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{D^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.}$

5. On réalise une récurrence.
<u>Initialisation</u>. Pour $n = 0$,
$M^0 = I_3$ d'une part, et $\frac{1}{6}PD^0Q = \frac{1}{6}PI_3Q = \frac{1}{6}PQ = I_3$ d'autre part, donc $M^0 = \frac{1}{6}PD^0Q$.
<u>Hérédité</u>. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $M^n = \frac{1}{6}PD^nQ$.
Alors $\frac{1}{6}PD^{n+1}Q = \frac{1}{6}PD^nDQ = \frac{1}{6^2}PD^nQMPQ = \frac{1}{6}M^n.M.6I_3 = M^{n+1}$.
<u>Conclusion</u>. D'après le principe de récurrence, la propriété $\boxed{M^n = \frac{1}{6}PD^nQ}$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

6. La première colonne de la matrice M^n est le résultat de $M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire

$$\frac{1}{6}PD^nQ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}PD^n \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}P \begin{pmatrix} 5^n \\ 9 \\ -2^{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5^n + 9 - 2^{n+2} \\ 2 \times 5^n - 2^{n+1} \\ 3 \times 5^n - 9 + 3 \times 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

Partie II : étude de l'entraînement d'un athlète au triathlon

7. L'athlète commence, au jour 0, par de la natation. Ainsi, $\boxed{a_0 = 1 \text{ et } b_0 = c_0 = 0}$ et au jour suivant, on a d'après l'énoncé : $\boxed{a_1 = b_1 = \frac{1}{5} \text{ et } c_1 = \frac{3}{5}.}$

8. On cherche $P(A_0 \cap C_1 \cap B_2 \cap A_3)$. D'après la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned} P(A_0 \cap C_1 \cap B_2 \cap A_3) &= P(A_0)P_{A_0}(C_1)P_{A_0 \cap C_1}(B_2)P_{A_0 \cap C_1 \cap B_2}(A_3) \\ &= 1 \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(A_0 \cap C_1 \cap B_2 \cap A_3) = \frac{6}{125}}$$

9. On cherche $P_{B_2}(A_1)$. D'après la formule de Bayes,

$$P_{B_2}(A_1) = \frac{P(A_1)P_{A_1}(B_2)}{P(B_2)} = \frac{\frac{1}{5} \times \frac{1}{5}}{P(B_2)}.$$

Or, (A_1, B_1, C_1) est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(B_2) = P(A_1)P_{A_1}(B_2) + P(B_1)P_{B_1}(B_2) + P(C_1)P_{C_1}(B_2) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{7}{25}.$$

Ainsi,

$$\boxed{P_{B_2}(A_1) = \frac{\frac{1}{25}}{\frac{7}{25}} = \frac{1}{7}.}$$

10. Pour tout $n \geq 0$, les évènements A_n, B_n et C_n forment un système complet d'évènements.

Donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= P(A_{n+1}) \\
&= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) \\
&= \frac{1}{5}P(A_n) + \frac{2}{5}P(B_n) \\
&= \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n.
\end{aligned}$$

De même,

$$b_{n+1} = P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1})+P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1})+P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{5}a_n+\frac{3}{5}b_n+\frac{1}{5}c_n.$$

et $\quad c_{n+1} = P(A_n)P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1}) = \frac{3}{5}a_n + \frac{4}{5}c_n.$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{3}{5}b_n + \frac{1}{5}c_n \\ c_{n+1} = \frac{3}{5}a_n + \frac{4}{5}c_n \end{cases}}$$

11.
```python
def Probas(n):
    L = [1,0,0]
    for k in range(n):
        a = L[0]
        b = L[1]
        c = L[2]
        L = [1/5*a+2/5*b , 1/5*a+3/5*b+1/5*c , 3/5*a+4/5*c]
    return L
```

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, avec

$$\boxed{A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}M.}$$

13. Notons $\boxed{X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.}$ Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \frac{1}{5^n}M^nX_0$.

<u>Initialisation</u>. Pour $n = 0$,
$\frac{1}{5^0}M^0X_0 = 1 \times I_3X_0 = X_0$.

<u>Hérédité</u>.Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_n = \frac{1}{5^n}M^nX_0$.
Alors, d'après la question précédente,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}MX_n = \frac{1}{5}M \times \frac{1}{5^n}M^nX_0 = \frac{1}{5^{n+1}}M^{n+1}X_0.$$

<u>Conclusion</u>. D'après le principe de récurrence, $\boxed{X_n = \frac{1}{5^n}M^nX_0 \text{ ppur tout } n \in \mathbb{N}.}$

Or $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc

$$M^nX_0 = \text{première colonne de } M^n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5^n - 2^{n+2} + 9 \\ 2 \times 5^n - 2 \times 2^n \\ 3 \times 5^n + 3 \times 2^{n+1} - 9 \end{pmatrix}$$

d'après la question 6. Ainsi, $\boxed{a_n = \frac{1}{6} - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^n}$, $\boxed{b_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n}$

et $\boxed{c_n = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{5}\right)^n - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^n}$

14. Puisque $\frac{2}{5} \in]-1,1[$ et $\frac{1}{5} \in]-1,1[$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$.

Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{6}}$, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{3}}$ et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{2}}$

Exercice Bonus

$\longrightarrow$ introduire pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ les événements P_i, F_i ...

1. (a) La case n est particulière car 2 conditions d'arrêt ! Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Alors $(T_n = k) = F_1 \cap \cdots F_{k-1} \cap P_k$ et d'après la formule des probabilités composées (à écrire), $P(T_n = k) = q^{k-1}p$, avec $q = 1 - p$.
$(T_n = n) = [F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap F_n] \cup [F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap P_n] = F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1}$ d'où $P(T_n = n) = q^{n-1}$.

   (b) Attention de bien couper la somme avant de pouvoir remplacer $P(T = k)$! D'après la relation de Chasles : $\sum_{k=1}^{n} P(T_n = k) = \sum_{k=1}^{n-1} P(T_n = k) + P(T_n = n) = (\sum_{k=1}^{n-1} pq^{k-1}) + q^{n-1} = (p\sum_{j=0}^{n-2} q^j) + q^{n-1} = (p\frac{1-q^{n-1}}{1-q}) + q^{n-1} = (1 - q^{n-1}) + q^{n-1}$ (car $1 - q = p$) $=1$.
Autre argument (si l'énoncé n'avait pas dit "par le calcul") : $T_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$, donc $\{(T_n = k), k \in [\![1, n]\!]\}$ est un s.c.e donc $\sum_{k=1}^{n} P(T_n = k) = 1$.

   (c) Pour $x \neq 1$, le polynôme $P_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} x^k$ vaut $P_n(x) = \frac{x-x^n}{1-x}$. P_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour $x \neq 1$ $P_n'(x) = \sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} = \frac{(1-nx^{n-1})(1-x)+(x-x^n)}{(1-x)^2} = \frac{1-nx^{n-1}+x^n(n-1)}{(1-x)^2}$.
Ou partir de $R_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$ de même dérivée ... (puisque la dérivée du terme 1 vaut 0).

   (d) T_n est une variable finie donc admet une espérance et
$E(T_n) = \sum_{k=1}^{n} kP(T_n = k) = \sum_{k=1}^{n-1} kP(T_n = k) + nP(T_n = n)$ (relation de Chasles) $= p\sum_{k=1}^{n-1} kq^{k-1} + nq^{n-1}$
$= p\frac{1-nq^{n-1}+(n-1)q^n}{(1-q)^2} + nq^{n-1} = \frac{1-nq^{n-1}+(n-1)q^n}{1-q} + \frac{nq^{n-1}(1-q)}{1-q} = \frac{1-nq^{n-1}+nq^n-q^n+nq^{n-1}-nq^n}{1-q} = \frac{1-q^n}{1-q}$.

2. $X_n(\Omega) = \{0, 1\}$ (donc X_n suit une loi de bernoulli) et $(X_n = 0) = F_1 \cap \cdots \cap F_n$ d'où $P(X_n = 0) = q^n$.
On en déduit que $P(X_n = 1) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - q^n$ puis que $E(X_n) = 1 - q^n$.

3. (a) $Y_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $(Y_n = k)$ se réalise ssi l'expérience finit par un pile : $(Y_n = k) = F_1 \cap ... \cap F_k \cap P_{k+1}$ et $P(Y_n = k) = q^k p$. Et $(Y_n = n) = F_1 \cap ... \cap F_n$ d'où $P(Y_n = n) = q^n$.

   (b) Un lancer donne soit pile soit face d'où $T_n = X_n + Y_n$ et $Y_n = T_n - X_n$. Par linéarité de l'espérance, $E(Y_n) = E(T_n) - E(X_n) = \frac{1-q^n}{1-q} - (1 - q^n) = (1 - q^n)\left(\frac{1}{1-q} - 1\right) = (1 - q^n)\frac{q}{1-q}$