SIMULATION CONCOURS BLANC N°2

Fonctions Réelles Polynômes

Exercice 1 :

1. Soit P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le degré du polynôme $x \mapsto P(x^2)$.
2. On introduit l'ensemble $E = \{P \in \mathbb{R}[x] / \text{ pour tout } x \in \mathbb{R},\ P(x^2) = (x^3+1)P(x) \quad (*)\}$.
   (a) Montrer que le polynôme nul ainsi que le polynôme $x \mapsto x^3 - 1$ sont deux éléments de E.
   (b) Analyse du problème : soit $P \in E$ non nul. Montrer qu'alors P est de degré 3.
   (c) Montrer que $P(1) = 0$.
   (d) Dériver la relation $(*)$, puis en déduire $P'(0) = 0$. *attention à la dérivée de la composée* $x \mapsto P(x^2)$
   (e) Montrer que $P''(0) = 0$.
   (f) En effectuant la division euclidienne de P par $x \mapsto x^3 - 1$, montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = k(x^3 - 1)$.
   (g) Faire la synthèse du problème. En déduire l'ensemble E.

Exercice 2 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x\ln(x)} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.
2. Déterminer le signe de f sur $\mathcal{D}$.
3. Montrer que f est continue en 1. f se prolonge-t-elle par continuité en 0 ?
4. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement.
5. Montrer que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$.
6. Justifier que f est dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$.
7. Dresser le tableau de variations complet de f. *Comme f est continue en 1, on pourra ne pas mettre de double barre en 1 pour f dans le tableau ...*

Problème :

On considère la fonction f définie sur $]0,1[$ par : $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$

Partie A : Étude de la fonction f

1. Justifier que f est bien définie sur $]0,1[$ et déterminer le signe de f sur $]0,1[$.
2. Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et que : $\forall x \in]0,1[,\ f'(x) = \frac{1}{x\,(1-x)\,(\ln(x))^2}\,(-x\,\ln(x) - (1-x)\,\ln(1-x))$
3. a) Justifier : $\forall t \in]0,1[,\ t\,\ln(t) < 0$.
   b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0,1[$.
4. a) Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.
   On note encore f la fonction ainsi prolongée en 0. Préciser $f(0)$.
   b) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
5. Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?
6. Dresser le tableau de variations complet de f sur $[0,1[$.
7. a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de l'intervalle $[0,1[$ sur un intervalle à déterminer.
   On notera f^{-1} sa bijection réciproque.
   b) Dresser le tableau de variations de f^{-1}.
   c) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur son ensemble de définition.
   d) Déterminer $f^{-1}(1)$ et $(f^{-1})'(1)$.
8. Tracer sur un même graphique l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, en faisant figurer la tangente en 0, ainsi que l'allure de f^{-1}. On pourra admettre que la courbe de f croise la droite d'équation $y = x$ au point d'abscisse $x \simeq 0.3$.

Partie B : Étude d'une suite

On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, (E_n) l'équation : $x^n + x - 1 = 0$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ que l'on note u_n.
10. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n appartient à l'intervalle $]0,1[$.
11. Déterminer u_1 et u_2.
12. a) Recopier et compléter la fonction `Python` suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

```
def val_app(n):
    a=0
    b=1
    while ... :
        c=(a+b)/2
        if c**n+c-1>0 :
            ...
        else:
            ...
    return ...
```

13. a) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $f(u_n) = n$.
    b) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
    c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

CORRIGE

Exercice 1 :

1. Soit $P : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, avec $a_n \neq 0$ un polynôme de degré n.
   Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x^2) = a_n(x^2)^n + a_{n-1}(x^2)^{n-1} + ... + a_1 x^2 + a_0 = a_n x^{2x} + a_{n-1}x^{2n-2} + ... + a_1 x^2 + a_0$.
   Comme $a_n \neq 0$, on obtient que $x \mapsto P(x^2)$ est de degré $2n$.
2. (a) Posons $P = 0_{\mathbb{R}[x]}$. Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 0$. Alors pour x fixé, $P(x^2) = 0$ et $(x^3+1)P(x) = 0$. D'où l'égalité pour tout $x \in \mathbb{R}$ et d'où $P \in E$.
   Avec $P : x \mapsto x^3 - 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x^2) = (x^2)^3 - 1 = x^6 - 1$ et $(x^3+1)P(x) = (x^3+1)(x^3-1) = x^6 - 1$, d'où $P \in E$.
   (b) Soit $P \in E$ un polynôme de degré n. Alors $P(x^2)$ est de degré $2n$ et $deg((x^3+1)P(x)) = deg(x^3+1) + deg(P) = 3 + n$. D'où comme $P \in E$, les deux polynômes doivent avoir même degré (puisqu'ils sont égaux) : $2n = 3 + n \Leftrightarrow n = 3$.
   (c) En prenant $x = 1$ dans $(*)$: $P(1) = 2P(1) \Leftrightarrow P(1) = 0$.
   (d) Rappel : la dérivée de $f(u)$ est $u'f'(u)$. On dérive $(*)$: pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $2xP'(x^2) = (3x^2)P(x) + (x^3+1)P'(x)$, d'où en $x = 0$, $0 = 0 + P'(0) \Leftrightarrow P'(0) = 0$.
   (e) On redérive :pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2P'(x^2) + 4x^2P''(x^2) = 6xP(x) + 3x^2P'(x) + 3x^2P'(x) + (x^3+1)P''(x)$. D'où en $x = 0$: $0 = P''(0)$.
   (f) D'après le théorème de division euclidienne, il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x^3-1)Q(x) + R(x)$ $(**)$ avec $R = 0_{\mathbb{R}[x]}$ ou $deg(R) < 3$. Donc R s'écrit $R : x \mapsto ax^2 + bx + c$. De plus, comme $deg(P) = 3 = deg(x^3-1)$, $deg(Q) = 0$ et il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $Q : x \mapsto k$. D'où $(**)$: $P(x) = k(x^3-1) + ax^2 + bx + c$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. En $x = 1$, on obtient $P(1) = 0 = a + b + c$. On dérive alors $(**)$: $P'(x) = k(3x^2) + 2ax + b$ et en $x = 0$, $0 = P'(0) = b$.
   Il reste à dériver une deuxième fois : $P''(x) = k6x + 2a$, et en $x = 0$, $0 = P''(0) = a$. Finalement, $a = b = c = 0$. Donc il existe bien $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $P : x \mapsto k(x^3-1)$.
   (g) Synthèse : soit $P : x \mapsto k(x^3-1)$, avec $k \in \mathbb{R}^*$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x^2) = k(x^6-1)$ et $(x^3+1)P(x) = k(x^6-1)$ donc ces polynômes sont solutions. En ajoutant le polynôme nul (qui est solution), on obtient que $E = \{x \mapsto k(x^3-1), k \in \mathbb{R}\}$.

Question 3 :

1. $\frac{x-1}{x\ln x}$ existe si $x > 0$ et $x\ln x \neq 0$ donc sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. De plus, f est définie en 1 avec la valeur 1. D'où $\mathcal{D} =]0,+\infty[$.
2. En 1, $f(1) = 1 \geq 0$. Sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$, faire un tableau de signe : $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$ et $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$. On trouve f positive sur $\mathcal{D}$.
3. $f(1) = 1$ et pour $x \neq 1$, en posant $X = x - 1 \underset{x\to1}{\longrightarrow} 0$, on a $f(x) = \frac{x-1}{x\ln(x)} = \frac{X}{(X+1)\ln(1+X)} = \frac{1}{X+1}\frac{X}{\ln(1+X)} \underset{X\to0}{\longrightarrow} 1 = f(1)$ d'après les limites usuelles (ou en passant par les équivalents usuels).
   En 0, $x\ln(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0^-$ d'après les croissances comparées, donc $\frac{1}{x\ln x} \underset{x\to0}{\longrightarrow} -\infty$, et comme $x - 1 \underset{x\to0}{\longrightarrow} -1$, on obtient $f(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} +\infty$. Donc f ne se prolonge pas par continuité en 0, et admet une asymptote verticale.
4. En $+\infty$, $FI\frac{\infty}{\infty}$; $f(x) \sim \frac{x}{x\ln(x)} = \frac{1}{\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Asymptote horizontale d'équation $y = 0$.
5. On pose $g : x \mapsto x - 1 - \ln x$. Alors g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x > 0$, $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$. Faire le TV. On en déduit que g admet un minimum en $x = 1$ et $g(1) = 0$. Donc pour tout $x > 0$, $g(x) \geq 0$
6. f est dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ comme quotient de fonctions usuelles dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, et $f'(x) = \frac{x\ln(x) - (x-1)(\ln x + x \times \frac{1}{x})}{(x\ln x)^2} = \frac{\ln x - (x-1)}{(x\ln x)^2}$.
7. D'après 5., on en déduit que pour tout $x \neq 1$, $f'(x) \leq 0$. Comme de plus f continue en 1 (donc on ne coupe pas la "flèche"), on obtient f décroissante sur $\mathcal{D}$.

Problème : `inspiré d'eml E 2020`

Partie A

1. Pour $x \in]0,1[$, $x > 0$ et $1-x>0$ donc $\ln(x)$ et $\ln(1-x)$ existent et $\ln(x) \neq 0$. Donc $f(x)$ existe bien. Puis si $x \in]0,1[$, $\ln(x) < 0$ et $\ln(1-) < 0$ (car $1-x<1$), donc $f(x) > 0$.
2. f est dérivable sur $]0,1[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et $\forall x \in]0,1[$, $f'(x) = \dfrac{-\frac{1}{1-x}\ln x - \frac{1}{x}\ln(1-x)}{(\ln x)^2}$. Il reste à mettre le numérateur au même dénominateur puis à utiliser la formule $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}$.
3. $\forall t \in]0,1[$, $t>0$ et $\ln t < 0$ donc $t\ln t < 0$ donc en prenant $t=x$ puis $t = 1-x$, on obtient $-x\ln x > 0$ et $-(1-x)\ln(1-x) > 0$. Par somme, le numérateur est strictement positif, et par quotient $f'(x) > 0$.
4. par continuité du ln en 1, $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1-x) = \ln 1 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\ln x = -\infty$ donc par quotient $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 \in \mathbb{R}$. Donc f se prolonge par continuité en 0 avec la valeur 0 : dorénavant, on pose $f(0)=0$.
   Dérivabilité en 0 : $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(1-x)}{x\ln(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x}{x\ln(x)} = -\frac{1}{\ln x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \in \mathbb{R}$.
   D'où f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$.
5. $\lim\limits_{x\to 1}\ln(1-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x = 0^-$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ (pas de F.I.!!)
   Asymptote verticale d'équation $x=1$.
7. (a) f est continue et strictement croissante sur $[0,1[$ donc (d'après le th de la bijection) f réalise une bijection de $[0,1[$ sur $[f(0), \lim\limits_{x\to 1} f(x)[= [0,+\infty[$.
   (b) De plus $f^{-1} : [0,+\infty[\to [0,1[$ est continue et strictement croissante comme f. Dessiner alors le TV.
   (c) Pour tout $x \in]0,1[$, f est dérivable en x et $f'(x) \neq 0$ donc f^{-1} est dérivable sur $f(]0,1[) =]0,+\infty[$. En revanche en 0, $f'(0)=0$, donc en $f(0)=0$ il y aura une tangente verticale : f^{-1} n'est donc pas dérivable en 0.
   (d) Pour trouver $f^{-1}(1)$, on résout l'équation $f(x) = 1 \Leftrightarrow \ln(1-x) = \ln(x)$ d'inconnue $x \in]0,1[$ (en effet, $x=0$ ne convient pas). On devine que $x = \frac{1}{2}$ marche. Par bijection, ce sera la seule solution donc $f^{-1}(1) = \frac{1}{2}$. Puis, $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(\frac{1}{2})}$. Il reste à calculer $f'(\frac{1}{2}) = ... = -\frac{4}{\ln(1/2)}$ d'où $(f^{-1})'(1) = \frac{\ln(2)}{4}$.
8. L'allure de la courbe de f^{-1} s'obtient par symétrie par rapport à la droite d'équation $y=x$....

Partie B

9. Soit $n \geq 1$. Poser $g_n : x \mapsto x^n + x - 1$ sur $\mathbb{R}^+$. TV etc... Alors g_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc g_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[g_n(0), \lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)[= [-1,+\infty[$. Par définition de la bijection, comme $0 \in [-1,+\infty[$, l'équation $g_n(x) = 0$ (càd (E_n)) admet bien une unique solution sur $\mathbb{R}^+$.
10. En réutilisant g_n : on a $g_n(0) = -1 < 0$ et $g_n(1) = 1 > 0$ Donc $g_n(0) < g_n(u_n) < g_n(1)$ et par stricte croissante de g_n sur $\mathbb{R}^+$, on a bien $0 < u_n < 1$.
11. u_1 est l'unique solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation $x^1 + x - 1 = 0$. Or $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ donc $u_1 = \frac{1}{2}$. de même pour u_2 : $x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ d'où $u_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (justifier rapidement le signe).
12. (a) Les quatre complétions sont : `while b-a>0.001` (pour avoir la précision souhaitée ! on pourrait même raffiner en mettant 0.002 puisqu'on va renvoyer le milieu à la fin) ; `b=c` (la fonction g_n est croissante, donc si elle est déjà positive en c, c'est qu'elle s'annule avant càd dans l'intervalle $[a,c]$) ; `a=c` ; `return c`.
    (b) Au vu du graphique, on conjecture que la suite u est croissante, et converge vers 1.
13. (a) u_n étant solution de (E_n), on a $(u_n)^n + x_n - 1 = 0 \Leftrightarrow (u_n)^n = 1 - u_n \Leftrightarrow \ln((u_n)^n) = \ln(1-u_n)$ (par bijectivité du ln sur $\mathbb{R}_+^*$ $\Leftrightarrow n\ln(u_n) = \ln(1-u_n) \Leftrightarrow \frac{\ln(1-u_n)}{\ln(u_n)} = n$ (puisque $u_n \neq 1$ donc $\ln(u_n) \neq 0$). D'où le résultat.
    Variante : partir de l'équation $f(x) = n$ .... et retomber (via des équivalences) sur (E_n). Donc u_n étant solution de l'une, est solution de l'autre !.
    (b) On a donc $f(u_n) = n$ et $f(u_{n+1}) = n+1$. Comme $n+1 > n$, on en déduit $f(u_{n+1}) > f(u_n)$ et vu la stricte croissance de f, on obtient (cf TV), $u_{n+1} > u_n$.
    (c) La suite (u_n) est croissante d'après le (e), et majorée par 1 d'après le (c) : elle est donc convergente ! Ou directement : $f(u_n) = n \Leftrightarrow u_n = f^{-1}(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ puisque d'après 7.(b), $\lim\limits_{y\to+\infty} f^{-1}(y) = 1$. (ce dernier résultat donne la cv ainsi que la limite).