Simulation Concours Blanc N°2

Fonctions Réelles
Polynômes

Calculatrices et documents interdits.

Soignez la présentation, encadrez vos résultats et conclusions.

Exercice 1

Soit g la fonction définie pour tout réel x par $g(x) = (x^3 + 4x^2 + 5x + 2)\,\mathrm{e}^{-x}$. On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de g dans un repère du plan.

1. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Soit f la fonction polynomiale définie par $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$.
   Trouver une racine de f puis une factorisation (maximale) de $f(x)$ dans $\mathbb{R}[x]$.
3. En déduire les variations de g. On dressera le tableau de variation complet de g.
4. Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -2.

Exercice 2

Partie I : préliminaires

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(1 + x^2) - x$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Déterminer le signe de f sur l'intervalle $[0, 1]$, en justifiant précisément.
5. Justifier pour tout réel $x \geqslant 0$, l'inégalité : $\ln(1 + x) \leqslant x$.

Partie II : étude d'une suite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln\left(1 + (u_n)^2\right)$.

6. Écrire un programme python qui affiche la liste $L = [u_0, u_1, \ldots, u_{100}]$.
7. Établir pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'encadrement suivant : $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
8. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
9. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
10. Écrire un programme python qui détermine le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n < 10^{-4}$.
11. (a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, établir l'inégalité : $u_{n+1} \leqslant u_n^2$.
    (b) En déduire pour tout entier $n \geqslant 1$, l'inégalité $u_n \leqslant (\ln(2))^n$.
    (c) Établir pour tout entier $n \geqslant 2$, l'inégalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k \leqslant \frac{1 - (\ln(2))^n}{1 - \ln(2)}$.

CORRIGE

Exercice 1

Soit g la fonction définie pour tout réel x par $g(x) = (x^3 + 4x^2 + 5x + 2)\,\mathrm{e}^{-x}$. On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de g dans un repère du plan.

1. Soit $x > 0$.

$$g(x) = \frac{x^3}{\mathrm{e}^x} + 4\frac{x^2}{\mathrm{e}^x} + 5\frac{x}{\mathrm{e}^x} + \frac{2}{\mathrm{e}^x}$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{\mathrm{e}^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ par croissance comparée et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0.}$

Soit $x < 0$.

$$g(x) = x^3\left(1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)\mathrm{e}^{-x}$$

Or, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$.
Par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty.}$

2. $f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - 3(-1) - 3 = -1 + 1 + 3 - 3 = 0$, donc $\boxed{-1 \text{ est racine de } f.}$
On en déduit que, pour tout réel x, $x+1$ divise $f(x)$. Posons la division euclidienne.

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x^2 - 3x - 3 & x+1 \\ \cline{2-2} -(x^3 + x^2) & x^2 - 3 \\ \hline -3x - 3 & \\ -(-3x - 3) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Ainsi, $f(x) = (x+1)(x^2 - 3)$ et donc $\boxed{f(x) = (x+1)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}).}$

3. $x \mapsto x^3 + 4x^2 + 5x + 2$ est polynomiale donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par produit, $\boxed{g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (3x^2 + 8x + 5)\,\mathrm{e}^{-x} + (x^3 + 4x^2 + 5x + 2)(-e^{-x}) \\ &= (3x^2 + 8x + 5 - x^3 - 4x^2 - 5x - 2)\,\mathrm{e}^{-x} \\ &= (-x^3 - x^2 + 3x + 3)\,\mathrm{e}^{-x} \\ &= -f(x)\,\mathrm{e}^{-x} \\ &= -(x+1)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})\,\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

Le signe de $g'(x)$ est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$-(x+1) = -x-1$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = x^2 - 3$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
e^{-x}		$+$		$+$		$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

De plus $g(\sqrt{3}) = (8\sqrt{3} + 14)\,\mathrm{e}^{-\sqrt{3}}$, $g(-\sqrt{3}) = (-8\sqrt{3} + 14)\,\mathrm{e}^{\sqrt{3}}$ et $g(-1) = 0$.
On en déduit le tableau de variation de g :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$g(-\sqrt{3})$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$g(\sqrt{3})$	$\searrow$	0

4. $g(-2) = 0$ et $g'(-2) = \mathrm{e}^2$ donc l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -2 est $y = \mathrm{e}^2(x+2) + 0$ c'est-à-dire $\boxed{y = \mathrm{e}^2\,x + 2\,\mathrm{e}^2.}$

Exercice 2

Partie I : préliminaires

1. La fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto 1 + x^2$ sont polynomiales donc définies sur $\mathbb{R}$. Par composée puis différence, f est donc définie sur
$$\{x \in \mathbb{R} \mid 1 + x^2 > 0\} = \mathbb{R}$$
car on a toujours $1 + x^2 \geqslant 1 > 0$.

2.
   - En $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} (1 + x^2) = +\infty$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} \ln(u) = +\infty$ donc par composée, $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1 + x^2) = +\infty$. Et $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$. Par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$.
   - Soit $x > 0$.
$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\right) - x = \ln(x^2) + \ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right) - x \\ &= 2\ln(x) - x + \ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right) \\ &= x\left(2 \times \frac{\ln(x)}{x} - 1\right) + \ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right) \end{aligned}$$
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissance comparée et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right) = \ln(1) = 0$ par composée. Par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$.
Autre méthode : pour $x > 0$
$$f(x) = \ln\left(1 + x^2\right) - \ln(\mathrm{e}^x) = \ln\left(\frac{1+x^2}{\mathrm{e}^x}\right) = \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x} + \frac{x^2}{\mathrm{e}^x}\right)$$
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^x} = 0$ par croissance comparée. De plus, $\lim\limits_{u\to0} \ln(u) = -\infty$ donc par composée, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$.

3. La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto 1 + x^2$ sont polynomiales donc dérivables sur $\mathbb{R}$. Par composée et différence, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - 1 = \frac{2x - 1 - x^2}{1+x^2} = -\frac{(1-x)^2}{1+x^2} \leqslant 0.$$
Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

4. $f(0) = \ln(1) = 0$.
Puisque f est décroissante sur $\mathbb{R}$, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \leqslant f(0) = 0$. En particulier, $\boxed{\text{pour } x \in [0,1],\ f(x) \leqslant 0.}$
Justifions que $x = 0$ est la seule solution de $f(x) = 0$ sur $[0, 1]$. Pour tout réel x, $f'(x) \leqslant 0$ et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (nombre fini de solutions) donc f est en fait strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour $x > 0$, $f(x) < f(0) = 0$ et donc $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]0, 1]$.
Ceci montre que $\boxed{x = 0 \text{ est la seule solution de } f(x) = 0 \text{ sur } [0,1].}$

5. Notons $g : x \mapsto \ln(1 + x) - x$. La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto 1 + x^2$ sont polynomiales donc dérivables sur $\mathbb{R}$. Par composée et différence, g est définie et dérivable sur $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 + x > 0\} =]-1, +\infty[$, donc en particulier sur $\mathbb{R}_+$. Soit $x \geqslant 0$.
$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} \leqslant 0.$$
Donc g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et ainsî, pour $x \geqslant 0$, $g(x) \leqslant g(0) = 0$. On en déduit que $\boxed{\text{pour tout } x \geqslant 0,\ \ln(1+x) \leqslant x.}$

Partie II : étude d'une suite

6.
```python
import numpy as np
u = 1
L = [u]
for k in range(100):
    u = np.log(1+u**2)
    L.append(u)
print(L)
```

7. <u>Initialisation</u> : $u_0 = 1$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$.
<u>Hérédité</u> : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
On a : $0 \leqslant (u_n)^2 \leqslant 1$ par croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$ donc $1 \leqslant 1+(u_n)^2 \leqslant 2 \leqslant \mathrm{e}$.
Par croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$\ln(1) \leqslant \ln(1+(u_n)^2) \leqslant \ln(\mathrm{e}) \quad \text{donc} \quad 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$$

<u>Conclusion</u> : d'après le principe de récurrence, $\boxed{0 \leqslant u_n \leqslant 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = \ln(1+(u_n)^2) - u_n = f(u_n) \leqslant 0$ car $u_n \in [0,1]$ (question 4). Donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

9. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel ℓ.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ donc par passage à la limite, $0 \leqslant \ell \leqslant 1$.
De plus, $u_{n+1} = \ln(1+(u_n)^2)$. D'après le cours, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(1+(u_n)^2) = \ln(1+\ell^2)$ donc

$$\ell = \ln(1+\ell^2) \quad \text{donc} \quad f(\ell) = 0.$$

D'après la question 4, on a donc $\ell = 0$. $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0.}$

10.
```
n = 0
u = 1
while u >= 10**(-4) :
    n = n+1
    u = np.log(1+u**2)
print(n)
```

11. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - (u_n)^2 = \ln(1+(u_n)^2) - (u_n)^2 \leqslant 0$ d'après la question 5 avec $x = (u_n)^2 \geqslant 0$. Donc $\boxed{u_{n+1} \leqslant u_n^2.}$

(b) <u>Initialisation</u> : $u_1 = \ln(1+1^2) = \ln(2) \leqslant (\ln(2))^1$.
<u>Hérédité</u> : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_n \leqslant (\ln(2))^n$.
D'après la question précédente, $u_{n+1} \leqslant u_n^2 \leqslant (\ln(2))^{2n}$ par croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$.
Or, $2n \geqslant n+1$ (car $n \geqslant 1$, c'est ici que l'on voit que ça ne marche pas en $n = 0$) et $\ln(2) \in [0,1]$ donc $(\ln(2))^{2n} \leqslant (\ln(2))^{n+1}$. Ainsi, $u_{n+1} \leqslant (\ln(2))^{n+1}$.
<u>Conclusion</u> : d'après le principe de récurrence, $\boxed{u_n \leqslant (\ln(2))^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$

(c) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k \leqslant (\ln(2))^k$.
Ceci est aussi valable en $k = 0$ car $u_0 = 1 \leqslant (\ln(2))^0$ (c'est l'hérédité que ne fonctionnait pas au rang 0 à la question précédente). Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k \leqslant (\ln(2))^k$. Par croissance de la somme,

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} (\ln(2))^k.$$

Or $\ln(2) \neq 1$ donc (on reconnaît une somme géométrique),

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} u_k \leqslant \frac{1-(\ln(2))^n}{1-\ln(2)}}.$$

Fin