SIMULATION DS N°7

Espaces Vectoriels

EXERCICE 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A - 2I_3)^2$ puis en déduire que $(A - 2I_3)^3 = 0$.
2. Montrer que l'ensemble $E_2 = \left\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = 2X\right\}$ est un espace vectoriel dont on donnera une base et la dimension.
3. Posons $U = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier que $AV \in \mathrm{Vect}(U, V)$.
   (b) Résoudre l'équation $AX = 2X + V$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (c) Posons $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que la famille (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
4. Considérons $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.
   (b) Déterminer la matrice T de sorte que $A = PTP^{-1}$ et vérifier que $T = 2I_3 + N$, où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
5. On considère l'ensemble $\mathcal{C} = \left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ AM = MA\right\}$.
   (a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel.
   (b) Soient $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $Q = P^{-1}MP$. Montrer l'équivalence :
   $$M \in \mathcal{C} \iff NQ = QN$$

Exercice 1. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E.

1. (a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$ et $\operatorname{Im}(f^{k+1}) \subset \operatorname{Im}(f^k)$.
   (b) Que peut-on dire de la suite $\left(\dim(\ker(f^k))\right)_{k\geq 0}$?
   (c) En déduire qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\ker(f^{k_0}) = \ker(f^{k_0+1})$.

   On notera dans la suite p le plus petit entier k tel que

$$\ker(f^k) = \ker(f^{k+1}).$$

   (d) Montrer par récurrence que : $\forall j \geq p$, $\ker(f^j) = \ker(f^p)$.
   (e) Montrer en utilisant le théorème du rang que

$$\forall j \geq p\,, \quad \operatorname{Im}(f^j) = \operatorname{Im}(f^p)$$

   et que

$$\forall j \in [\![0, p-1]\!]\,, \quad \operatorname{Im}(f^j) \neq \operatorname{Im}(f^{j+1}).$$

   (f) Montrer que $\ker(f^p) \oplus \operatorname{Im}(f^p) = E$.
2. (a) Déterminer p si l'application f est bijective.
   (b) Dans cette question on suppose que f est un projecteur.
      (i) Montrer que f est bijectif ssi $f = \mathrm{id}_E$.
      (ii) En déduire p.

Exercice 2. On lance une pièce équilibrée un nombre infini de fois. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'événement E_n : ≪ *lors des n premiers lancers, on n'obtient jamais deux fois* PILE *à la suite* ≫ et l'on pose $u_n = P(E_n)$.
On notera, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, F_n (respectivement P_n) l'événement : ≪ *obtenir* PILE *(resp.* FACE*) lors du n-ième lancer* ≫.

1. Donner les valeurs de u_1 et u_2.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E_{n+2} = (E_{n+1} \cap F_{n+2}) \cup (E_n \cap F_{n+1} \cap P_{n+2})$.
3. En déduire qu'il existe deux réels α et β que l'on ne cherchera pas à calculer, tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n.$$

4. En déduire que la série de terme général u_n converge.
5. Montrer finalement que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 5$.

Exercice 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A-2I_3)^2$ puis en déduire que $(A-2I_3)^3 = 0$.

   On a $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ puis $(A-2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Conclusion : $(A-2I_3)^3 = 0$.

2. Montrer que l'ensemble $E_2 = \left\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = 2X\right\}$ est un espace vectoriel dont on donnera une base et la dimension.

   Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} AX = 2X \quad & \iff \quad A(-2I_3)X = 0 \\ & \iff \quad \begin{cases} -x-y=0 \\ z=0 \\ -x-y+z=0 \end{cases} \\ & \iff \quad \begin{cases} -x-y=0 \\ z=0 \end{cases} \\ & \iff \quad \begin{cases} x=-y \\ y=y \\ z=0 \end{cases} \\ & \iff \quad X = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Ainsi : $E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

   - Par conséquent, E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et donc un espace vectoriel.
   - De plus, la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est :
     - génératrice de E_2 d'après ce qui précède,
     - libre, car constituée d'un seul vecteur non nul.

     Par conséquent, la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est une base de E_2 et ainsi $\dim(E_2) = 1$.

   ✘ **Attention !**
   $\dim(E_2)$ est le cardinal commun des bases de E_2... Ici, la base trouvée n'est constituée que d'une seule matrice.

3. Posons $U = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Vérifier que $AV \in \mathrm{Vect}(U, V)$.
   On a déjà :

$$AV = \ldots = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   De plus, on remarque que :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = U + 2V$$

   Conclusion : $AU \in \mathrm{Vect}(U, V)$.

   ☞ **Rappel...**
   $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) = \left\{a\vec{u} + b\vec{v} \ / \ a, b \in \mathbb{R}\right\}$: c'est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

   (b) Résoudre l'équation $AX = 2X + V$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} AX = 2X + V \quad & \iff \quad (A-2I_3)X = V \\ & \iff \quad \begin{cases} -x-y=1 \\ z=0 \\ -x-y+z=1 \end{cases} \\ & \iff \quad \begin{cases} x=1-y \\ y=y \\ z=0 \end{cases} \\ & \iff \quad X = \begin{pmatrix} -1-y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Conclusion : $\left\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = 2X + V\right\} = \left\{\begin{pmatrix} -1-y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \ / \ y \in \mathbb{R}\right\}$.

   ☞ **Pour info...**
   Si on avait défini la somme d'ensembles, on aurait pu écrire : $\left\{\begin{pmatrix} -1-y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \ / \ y \in \mathbb{R}\right\} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$: c'est un *espace affine* de dimension 1, porté par l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$...

   (c) Posons $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que la famille (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- La famille (U,V,W) est de cardinal 3 dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, espace vectoriel de dimension 3 ; donc pour montrer qu'elle est une base, il suffit de montrer qu'elle est libre.
- Soient $a,b,c\in\mathbb{R}$. On a :

$$aU+bV+cW=0 \iff \begin{cases} -a+b-c=0 \\ a=0 \\ b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$$

Par conséquent, la famille (U,V,W) est libre.

Conclusion : la famille (U,V,W) est une base.

4. Considérons $P=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.

Méthode habituelle... On trouve que P est inversible et $P^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Déterminer la matrice T de sorte que $A=PTP^{-1}$ et vérifier que $T=2I_3+N$, où $N=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Puisque $A=PTP^{-1}$, on trouve $T=P^{-1}AP$, et donc : $T=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Conclusion : $A=PTP^{-1}$, où $T=2I_3+N$.

5. On considère l'ensemble $\mathcal{C}=\left\{M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \;/\; AM=MA\right\}$.

(a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel.

- Par définition, $\mathcal{C}\subset\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel ;
- La matrice nulle appartient à $\mathcal{C}$ (car $A\times 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}=0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}\times A$), donc $\mathcal{C}$ est non vide.
- Soient $a,b\in\mathbb{R}$ et $M,M'\in\mathcal{C}$. Montrons que $aM+bM'\in\mathcal{C}$.
  On sait déjà que $aM+bM'\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et de plus :

$$\begin{aligned} A(aM+bM') &= aAM+bAM' \\ &= aMA+bM'A \quad \text{M, M}'\in\mathcal{C} \\ &= (aM+bM')A \end{aligned}$$

  Par conséquent : $aM+bM'\in\mathcal{C}$.

Conclusion : $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donc un espace vectoriel.

(b) Soient $M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $Q=P^{-1}MP$. Montrer l'équivalence :

$$M\in\mathcal{C} \iff NQ=QN$$

On a :

$$\begin{aligned} M\in\mathcal{C} &\iff AM=MA \\ &\iff PTP^{-1}PQP^{-1}=PQP^{-1}PTP^{-1} \quad A=PTP^{-1} \text{ et } Q=PMP^{-1} \\ &\iff PTQP^{-1}=PQTP^{-1} \quad PP^{-1}=P^{-1}P=I_3 \\ &\iff TQ=QT \\ &\iff (2I_3+N)Q=Q(2I_3+N) \\ &\iff 2Q+NQ=2Q+QN \\ &\iff NQ=QN \end{aligned}$$

Conclusion : $M\in\mathcal{C} \iff NQ=QN$.

(c) Démontrer que $\left\{Q\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \;/\; NQ=QN\right\}=\mathrm{Vect}(I_3,N,N^2)$.

Soit $Q=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On a :

$$NQ=\begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad QN=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix}$$

D'où :

$$NQ=QN \iff \begin{cases} d=0 \\ e=a \\ f=b \\ g=0 \\ h=d \\ i=e \\ 0=0 \\ 0=g \\ 0=h \end{cases} \iff Q=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Par conséquent :

$$\left\{Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ NQ = QN\right\} = \left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \ / \ a,b,c \in \mathbb{R}\right\}$$

Et comme $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a bien :

$$\left\{Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ NQ = QN\right\} = \left\{aI_3 + bN + cN^2 \ / \ a,b,c \in \mathbb{R}\right\}$$

Conclusion : $\left\{Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ NQ = QN\right\} = \mathrm{Vect}(I_3, N, N^2)$.

(d) Déterminer alors une base de $\mathcal{C}$ ainsi que sa dimension.

Soit $M \in \mathcal{C}$. On a :

$$\begin{array}{rcll} M \in \mathcal{C} & \iff & AM = MA & \\ & \iff & P^{-1}MP \in \left\{Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ NQ = QN\right\} & \text{question 5(b)} \\ & \iff & \exists a,b,c \in \mathbb{R} \ / \ P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} & \text{question précédente} \\ & \iff & \exists a,b,c \in \mathbb{R} \ / \ M = P\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}P^{-1} & \\ & \iff & \exists a,b,c \in \mathbb{R} \ / \ M = \begin{pmatrix} a-b+c & -b+c & -c \\ -c & a-c & b+c \\ -b & -b & a+b \end{pmatrix} & \end{array}$$

En gros...

On a fait une sorte de "changement d'inconnu" entre la recherche du commutant de N et celui de A... Par conséquent : $\mathcal{C} \neq \mathrm{Vect}(I_3, N, N^2)$.

Par conséquent :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C} & = & \left\{\begin{pmatrix} a-b+c & -b+c & -c \\ -c & a-c & b+c \\ -b & -b & a+b \end{pmatrix} \ / \ a,b,c \in \mathbb{R}\right\} \\ & = & \mathrm{Vect}\left(I_3, (A-2I_3), (A-2I_3)^2\right) \end{array}$$

La famille $\left(I_3, (A-2I_3), (A-2I_3)^2\right)$ est ainsi génératrice de $\mathcal{C}$... De plus, elle est libre (il suffit de regarder les matrices), c'est alors une base de $\mathcal{C}$.

Conclusion : $\left(I_3, (A-2I_3), (A-2I_3)^2\right)$ est une base de $\mathcal{C}$, et ainsi $\dim(\mathcal{C}) = 3$.

Petite remarque

En fait, $PI_3P^{-1} = I_3$, $PNP^{-1} = P(T-2I_3)P^{-1} = PTP^{-1} - 2I_3 = A - 2I_3$ et $PN^2P^{-1} = (A-2I_3)^2$... Et les questions 5(b) et 5(c) nous permettent alors d'avoir directement : $\mathcal{C} = \mathrm{Vect}\left(I_3, (A-2I_3), (A-2I_3)^2\right)$...

6. On considère l'ensemble $\mathcal{R} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ M^2 + I_3 = A\}$.

(a) L'ensemble $\mathcal{R}$ est-il un espace vectoriel ?

$\mathcal{R}$ n'est pas un espace vectoriel car il ne contient pas la matrice nulle : $0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} + I_3 \neq A$.

✘ Attention !

Cela ne signifie pas qu'il est non vide !! S'il était vide, passerions-nous vraiment 5 questions à l'étudier... ?

(b) Soient $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $Q = P^{-1}MP$. Montrer l'équivalence :

$$M \in \mathcal{R} \iff Q^2 = I_3 + N$$

On a :

$$\begin{array}{rcl} M \in \mathcal{R} & \iff & M^2 + I_3 = A \\ & \iff & PQ^2P^{-1} + I_3 = A \\ & \iff & Q^2 + P^{-1}I_3P = P^{-1}AP \\ & = & Q^2 + I_3 = T \\ & = & Q^2 + I_3 = 2I_3 + N \\ & = & Q^2 = I_3 + N \end{array}$$

Conclusion : $M \in \mathcal{R} \iff Q^2 = I_3 + N$.

(c) Soit $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que si $Q^2 = I_3 + N$, alors nécessairement, Q et N commutent.

Supposons que $Q^2 = I_3 + N$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} QN & = & Q(Q^2 - I_3) \\ & = & Q^3 - Q \\ & = & (Q^2 - I_3)Q \\ & = & NQ \end{array}$$

Conclusion : si $Q^2 = I_3 + N$, alors nécessairement, Q et N commutent.

(d) En déduire, à l'aide de la question 5(c), les matrices $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $Q^2 = I_3 + N$.

Soit $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Raisonnons par condition nécessaire et condition suffisante (ou analyse synthèse).

- **Condition nécessaire.** Supposons que $Q^2 = I_3 + N$.
  Nécessairement, d'après la question précédente, Q commute avec N. Mais alors, d'après le résultat de la question 5(c), il existe des réels a, b, c tels que $Q = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

  Dans ce cas :

$$Q^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 + 2ac \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

Mais alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Q}^2 = \mathrm{I}_3 + \mathrm{N} \quad & \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2+2ac \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a^2 = 1 \\ 2ab = 1 \\ b^2 + 2ac = 0 \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \begin{cases} a = 1 \\ b = \dfrac{1}{2} \\ c = \dfrac{-1}{8} \end{cases} \\ \text{ou} \\ \begin{cases} a = -1 \\ b = \dfrac{-1}{2} \\ c = \dfrac{1}{8} \end{cases} \end{cases}
\end{aligned}$$

Par conséquent, les candidat-solutions à l'équation $\mathrm{Q}^2 = \mathrm{I}_3 + \mathrm{N}$ sont les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/8 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et sont opposée.

- **Condition suffisante.** Il ne reste qu'à regarder si ces candidat-solutions sont bien solution... Bon, c'est le cas !

Conclusion : les solutions de l'équation $\mathrm{Q}^2 = \mathrm{I}_3 + \mathrm{N}$ sont $\pm \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/8 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(e) Conclure en déterminant l'ensemble $\mathcal{R}$.

Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} \in \mathcal{R} \quad & \Longleftrightarrow \quad \mathrm{M}^2 + \mathrm{I}_3 = \mathrm{A} && \text{question 6(b)} \\
& \Longleftrightarrow \quad \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} \in \left\{\mathrm{Q} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \,/\, \mathrm{Q}^2 = \mathrm{I}_3 + \mathrm{N}\right\} && \text{question précédente} \\
& \Longleftrightarrow \quad \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} = \pm \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/8 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow \quad \mathrm{M} = \pm \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 3 \\ -4 & -4 & 12 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Petite remarque

Les raisonnements mis en place dans cette question 6 sont très proches de ceux de la question 5... Les calculs sont en revanche un peu différents. Sur cette fin d'exercice, on peut sans aucun problème tolérer que la copie contienne un peu moins de détails calculatoires...

Conclusion : $\mathcal{R} = \left\{ \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 3 \\ -4 & -4 & 12 \end{pmatrix}, \frac{-1}{8} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 3 \\ -4 & -4 & 12 \end{pmatrix} \right\}$.

CQFR

Ce qu'il faut retenir des copies : Exercice très classique qui a été globalement bien traité. La fin de la question 5 et la question 6 peuvent maintenant être retravaillées pour gagner encore quelques points sur cet exercice.

★★★★★★★

Proposition de solutions

Solution 1 1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrons que $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$. Soit $x \in \ker(f^k)$. Alors, $f^k(x) = 0_E$. Ainsi, $f(f^k(x)) = f^{k+1}(x)$ et $f(f^k(x)) = f(0_E) = 0_E$. D'où $f^{k+1}(x) = 0_E$ et $x \in \ker(f^{k+1})$.

Conclusion : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})\,.}$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathrm{Im}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(f^k)$.

Soit $y \in \mathrm{Im}(f^{k+1})$. Par définition il existe $x \in E$ tel que $y = f^{k+1}(x)$. Or $f^{k+1} = f^k \circ f$ donc $y = f^k(f(x)) \in \mathrm{Im}(f^k)$.

Conclusion : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{Im}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(f^k)}$.

(b) Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$, alors, $\dim(\ker(f^k)) \leq \dim(\ker(f^{k+1}))$. De plus, pour tout entier k, $\ker(f^k) \subset E$, donc $\dim(\ker(f^k)) \leq n$. La suite $\left(\dim(\ker(f^k))\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée par n. D'après le théorème de convergence monotone, elle converge.

(c) La suite $\left(\dim(\ker(f^k))\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers convergente, on en déduit que la suite est stationnaire à partir d'un certain rang $k_0 \in \mathbb{N}$ (se redémontre avec la définition de la convergence, exercice fait en début d'année). La suite $\left(\dim(\ker(f^k))\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à partir du rang k_0. Donc $\dim(\ker(f^{k_0})) = \dim(\ker(f^{k_0+1}))$.

De plus, $\ker(f^{k_0}) \subset \ker(f^{k_0+1})$. Les deux sous-espaces vectoriels étant de même dimension, on en déduit :

Conclusion : $\boxed{\ker(f^{k_0}) = \ker(f^{k_0+1})}$

(d) Montrons par récurrence que pour tout $j \geq p$, $\ker(f^j) = \ker(f^p)$.

— La propriété est immédiatement vérifiée pour $j = p$ et $j = p+1$.

— Soit $j \geq p$. On suppose $\ker(f^j) = \ker(f^p)$. Montrons que $\ker(f^{j+1}) = \ker(f^p)$.
D'après la question 1.a, $\ker(f^j) \subset \ker(f^{j+1})$. D'où, par hypothèse de récurrence, $\ker(f^p) \subset \ker(f^{j+1})$.
De plus, soit $x \in \ker(f^{j+1})$. Alors, $f^{p+1}(f^{j-p}(x)) = 0_E$ et $f^{j-p}(x) \in \ker(f^{p+1})$. Or $\ker(f^{p+1}) = \ker(f^p)$ donc $f^p(f^{j-p}(x)) = 0_E$ d'où $f^j(x) = 0_E$ et $x \in \ker(f^j) = \ker(f^p)$. D'où $\ker(f^{j+1}) \subset \ker(f^p)$.
Alors, $\ker(f^{j+1}) = \ker(f^p)$.

— La propriété est initialisée au rang p et héréditaire à partir de ce rang. On a donc :
Conclusion : $\boxed{\forall j \geq p,\ \ker(f^j) = \ker(f^p).}$

(e) Soit $j \geq p$. Alors, $\mathrm{Im}(f^j) \subset \mathrm{Im}(f^p)$. De plus, d'après le théorème du rang

$$\mathrm{rg}\,(f^j) = n - \dim(\ker(f^j)) = n - \dim(\ker(f^p)) = \mathrm{rg}\,(f^p) \text{ car } \ker(f^j) = \ker(f^p)$$

D'où $\dim(\mathrm{Im}(f^j)) = \dim(\mathrm{Im}(f^p))$.

Conclusion : $\boxed{\forall j \geq p,\ \mathrm{Im}(f^j) = \mathrm{Im}(f^p)\,.}$

De plus, soit $j \in [\![0, p-1]\!]$. Supposons que $\mathrm{Im}(f^j) = \mathrm{Im}(f^{j+1})$. Alors,

$$\dim(\ker(f^j)) = n - \mathrm{rg}\,(f^j) = n - \mathrm{rg}\,(f^{j+1}) = \dim(\ker(f^{j+1}))$$

De plus, $\ker(f^j) \subset \ker(f^{j+1})$ d'où $\ker(f^j) = \ker(f^{j+1})$. C'est absurde car $j < p$ et p est le plus petit entier k tel que $\ker(f^k) = \ker(f^{k+1})$. Donc :

Conclusion : $\boxed{\forall j \in [\![0, p-1]\!],\ \mathrm{Im}(f^j) \neq \mathrm{Im}(f^{j+1})\,.}$

(f) Montrons tout d'abord que la somme est directe. Soit $x \in \ker(f^p) \cap \mathrm{Im}(f^p)$. Alors, $f^p(x) = 0_E$ et il existe $y \in E$ tel que $x = f^p(y)$. D'où, $f^{2p}(y) = 0_E$ et $y \in \ker(f^{2p})$. Comme $2p \geq p$, $\ker(f^{2p}) = \ker(f^p)$ et $y \in \ker(f^p)$. Alors, $f^p(y) = 0_E$ et $x = 0_E$. On en déduit que $\ker(f^p) \cap \mathrm{Im}(f^p) = \{0_E\}$. La somme est directe. De plus $\dim(\ker(f^p) \oplus \mathrm{Im}(f^p)) = \dim(\ker(f^p)) + \mathrm{rg}\,(f^p) = n = \dim(E)$ d'après le théorème du rang. Comme $\ker(f^p) \oplus \mathrm{Im}(f^p) \subset E$, on en déduit :

Conclusion : $\boxed{\ker(f^p) \oplus \mathrm{Im}(f^p) = E}$

2. (a) Si f est bijective, alors $\ker(f) = \{0_E\} = \ker(\mathrm{id}_E) = \ker(f^0)$. L'entier p vaut donc 0.

(b) i. f est un projecteur donc $f \circ f = f$. Si f est bijectif, on compose cette égalité par f^{-1}, il vient $f = \mathrm{id}_E$. Réciproquement si $f = \mathrm{id}_E$, alors f est bijectif.
Conclusion : $\boxed{f \text{ est bijectif si et seulement si } f = \mathrm{id}_E.}$

ii. Si f est un projecteur bijectif, alors $p = 0$. Sinon, $f \neq \mathrm{id}_E$ et f n'est pas bijectif donc $\ker(f) \neq \{0_E\}$. Comme $f^2 = f$, alors $\ker(f^2) = \ker(f)$ d'où $p = 1$.