DS N°7

Espaces Vectoriels

Exercice 1

On considère l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (-2x-y+2z, -15x-6y+11z, -14x-6y+11z) \end{array} \right.$

1. Déterminer la matrice A telle que $\forall X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}), Y = AX$,
   où X et Y sont respectivement les matrices colonnes du vecteurs (x,y,z) et du vecteur $f((x,y,z)) = (-2x-y+2z, -15x-6y+11z, -14x-6y+11z)$, et en déduire d'après le cours que f est une application linéaire.
2. Montrer que $V = \{X \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad f(X) = X\}$ est un espace vectoriel.
   Justifier que V possède une base constituée d'un seul vecteur, que l'on notera e_1.
3. Déterminer un vecteur $e_2 \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(e_2) = e_2 + e_1$ et tel que sa dernière composante soit nulle.
4. Déterminer un vecteur $e_3 \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(e_3) = e_3 + e_2$ et telle que sa dernière composante soit égale à 1.
5. La famille (e_1, e_2, e_3) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
6. Déterminer $Ker(f)$, en donner une base. Que peut-on en déduire pour l'application f ?
7. Déterminer $Im(f)$ et en donner une base. Que peut-on en déduire pour l'application f ?
8. En admettant que $e_1 = (1,1,2), e_2 = (-1,2,0), e_3 = (2,-3,1)$, on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier que la matrice P est inversible et donner son inverse P^{-1}.
   (b) Déterminer l'unique matrice T telle que $A = PTP^{-1}$.

Exercice 2

1. **Un exemple** – Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$f(x, y, z) = (x + y - 2z, x + y - 2z, x + y - 2z).$$

   (a) Vérifier que f est linéaire.
   (b) Calculer $f \circ f$.
   (c) Déterminer une base de $\ker(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
   (d) Vérifier que $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$.
   (e) Montrer que

$$\mathrm{Vect}((3, 2, 1)) \oplus \ker(f) = \mathbb{R}^3.$$

2. **Un premier résultat** – Dans cette question E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie égale à 3. Soit f un endomorphisme *non nul* de E tel que $f \circ f = \theta$ (θ est l'endomorphisme nul).

   (a) Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$.
   (b) En déduire que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$.
   Il existe donc x un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(f)$. Soit $a \in E$ tel que $x = f(a)$.
   (c) Justifier que $\mathrm{Vect}(x) = \mathrm{Im}(f)$.
   (d) Montrer que

$$\mathrm{Vect}(a) \oplus \ker(f) = E.$$

3. **Un deuxième résultat** – Dans cette question E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie égale à 4. Soit f un endomorphisme *non nul* de E tel que $f \circ f = \theta$.

   (a) Montrer que $\dim(\mathrm{Im}(f)) \in \{1, 2\}$.
   Dans la suite on se place dans le cas $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \ker(f)$.
   (c) Soit (x_1, x_2) une base de $\mathrm{Im}(f)$ et $a_1 \in E$ et $a_2 \in E$ tels que $x_1 = f(a_1)$ et $x_2 = f(a_2)$. Montrer que (a_1, a_2, x_1, x_2) est une base de E.
   (d) Montrer finalement que

$$\mathrm{Vect}(a_1, a_2) \oplus \ker(f) = E.$$

Fin

Proposition de solutions

Solution 1. **Un exemple** –

(a) On vérifie facilement que f est linéaire.

(b) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} f \circ f(x, y, z) &= f(f(x, y, z)) \\ &= f(x + y - 2z, x + y - 2z, x + y - 2z) \\ &= (x + y - 2z + x + y - 2z - 2(x + y - 2z), *, *) \\ &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Cela signifie que $f \circ f$ est l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^3$.

(c) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors $(x, y, z) \in \ker(f) \iff x + y - 2z = 0 \iff x = -y + 2z$.
Ainsi on trouve

$$\ker(f) = \{(-y + 2z, y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((-1, 1, 0), (2, 0, 1)).$$

La famille $(-1, 1, 0), (2, 0, 1)$ est génératrice de $\ker(f)$ par définition et libre car composée de deux vecteurs non-colinéaires. Donc c'est une base de $\ker(f)$.
Comme la famille $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}(f(1, 0, 0), f(0, 1, 0), f(0, 0, 1)) \\ &= \mathrm{Vect}((1, 1, 1), (1, 1, 1), (-2, -2, -2)) \\ &= \mathrm{Vect}((1, 1, 1)). \end{aligned}$$

La famille $((1, 1, 1))$ est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ par définition et libre car composée d'un seul vecteur, qui est non-nul. Donc c'est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

(d) On a $(1, 1, 1) = (-1, 1, 0) + (2, 0, 1)$.
Ainsi $(1, 1, 1) \in \ker(f)$ et donc $\mathrm{Vect}(1, 1, 1) \subset \ker(f)$ i.e. $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$.

(e) D'après la question 1.(c) on voit que $\dim(\ker(f)) = 2$.
De plus la famille $((3, 2, 1))$ est génératrice de $\mathrm{Vect}((3, 2, 1))$ et libre car composée d'un unique vecteur, qui est non-nul. Donc cette famille est une base de $\mathrm{Vect}((3, 2, 1))$.
Ainsi $\dim(\mathrm{Vect}((3, 2, 1))) = 1$. On obtient donc

$$\dim(\mathrm{Vect}((3, 2, 1))) + \dim(\ker(f)) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3).$$

Soit $u \in \mathrm{Vect}((3, 2, 1)) \cap \ker(f)$.
Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda(3, 2, 1) = (3\lambda, 2\lambda, \lambda)$.
De plus $f(3\lambda, 2\lambda, \lambda) = (0, 0, 0)$ i.e. $(3\lambda + 2\lambda - 2\lambda, 3\lambda + 2\lambda - 2\lambda, 3\lambda + 2\lambda - 2\lambda) = (0, 0, 0)$.
On en déduit que $3\lambda = 0$ puis que $u = (0, 0, 0)$. Ainsi on a montré que

$$\mathrm{Vect}((3, 2, 1)) \cap \ker(f) = \{(0, 0, 0)\}.$$

Ainsi on a bien

$$\mathrm{Vect}((3, 2, 1)) \oplus \ker(f) = \mathbb{R}^3.$$

2. **Un premier résultat** –

(a) Soit $x \in \mathrm{Im}(f)$. Alors il existe $a \in E$ tel que $x = f(a)$. Ainsi

$$f(x) = f(f(a)) = f \circ f(a) = \theta(a) = 0_E.$$

Donc $x \in \ker(f)$. On a ainsi montré que $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$.

(b) Comme f n'est pas l'endomorphisme nul, on a $\mathrm{Im}(f) \neq \{0_E\}$ et donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) \geq 1$.
De plus d'après ce qui précède et le théorème du rang

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) \leq \dim(\ker(f)) = 3 - \dim(\mathrm{Im}(f)) \quad \text{i.e.} \quad 2\dim(\mathrm{Im}(f)) \leq 3.$$

On en déduit que

$$1 \leq \dim(\mathrm{Im}(f)) \leq \frac{3}{2}.$$

Ainsi on a bien $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$.

(c) Comme $x \in \mathrm{Im}(f)$ on en déduit que $\mathrm{Vect}(x) \subset \mathrm{Im}(f)$.
De plus, comme x est un vecteur non-nul, on a $\dim(\mathrm{Vect}(x)) = 1 = \dim(\mathrm{Im}(f))$.
Ainsi $\mathrm{Vect}(x) = \mathrm{Im}(f)$.

(d) Comme $f(a) \neq 0_E$ alors $a \neq 0_E$ et donc $\dim(\mathrm{Vect}(a)) = 1$.
De plus d'après le théorème du rang $\dim(\ker(f)) = 3 - \dim(\mathrm{Im}(f)) = 3 - 2 = 1$.
Ainsi on en déduit que

$$\dim(\mathrm{Vect}(a)) + \dim(\ker(f)) = 1 + 2 = 3.$$

Soit $y \in \mathrm{Vect}(a) \cap \ker(f)$.
Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda a$.
De plus $f(y) = 0_E$. Or $f(y) = f(\lambda a) = \lambda f(a) = \lambda x$. On en déduit que $\lambda x = 0_E$.
Comme $x \neq 0_E$ alors $\lambda = 0$ et donc $y = 0_E$.
On a ainsi montré que

$$\mathrm{Vect}(a) \cap \ker(f) = \{0_E\}.$$

On a donc bien

$$\mathrm{Vect}(a) \oplus \ker(f) = E.$$

3. **Un deuxième résultat** –

(a) Pour les mêmes raisons qu'à la question précédente on a $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$ et $\dim(\mathrm{Im}(f)) \geq 1$.
Ainsi d'après ce qui précède et le théorème du rang

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) \leq \dim(\ker(f)) = 4 - \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

On en déduit que

$$1 \leq \dim(\mathrm{Im}(f)) \leq 2 \quad \text{i.e.} \quad \dim(\mathrm{Im}(f)) \in \{1, 2\}.$$

(b) On a toujours $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$. Par ailleurs, d'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) = 4 - \dim(\mathrm{Im}(f)) = 4 - 2 = 2 = \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Ainsi on a montré que $\mathrm{Im}(f) = \ker(f)$.

(c) Montrons que la famille (a_1, a_2, x_1, x_2) est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 = 0_E. \qquad (\star)$$

En appliquant f on obtient

$$\begin{aligned} f(0_E) &= f(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) \\ &= \lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2) + \mu_1 f(x_1) + \mu_2 f(x_2) \\ &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \mu_1 f(f(a_1)) + \mu_2 f(f(a_2)) \\ &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \end{aligned}$$

On obtient donc $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0_E$.
Comme la famille (x_1, x_2) est une base de $\mathrm{Im}(f)$, elle est libre et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
En injectant cela dans $(\star)$, on obtient $\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 = 0_E$, ce qui nous donne pour les mêmes raisons que précédemment $\mu_1 = \mu_2 = 0$.
Ainsi la famille (a_1, a_2, x_1, x_2) est libre. De plus elle a $4 = \dim(E)$ éléments.
C'est donc une base de E.

(d) Comme la famille (a_1, a_2) est une sous-famille de (a_1, a_2, x_1, x_2), elle est libre.
C'est donc une base de $\mathrm{Vect}(a_1, a_2)$.
De plus (x_1, x_2) est une base de $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(f) = \ker(f)$.
Donc (x_1, x_2) est une base de $\ker(f)$.
Ainsi d'après le théorème de concaténation des bases, on a bien

$$\mathrm{Vect}(a_1, a_2) \oplus \ker(f) = E.$$