ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⵜⴳ ⴰⵣⵣⴰⵏⴰⵏ
ⴷ ⵓⵙⵍⵎⴷ ⴰⵏⴰⴼⵍⵍⴰ ⴷ ⵓⵔⵣⵣⵓ ⴰⵎⴰⵙⵙⴰⵏ
ⵜⴰⵏⵙⴰⴱⵜ ⵏ ⵜⵏⴱⴰⴹⵜ ⵉⵜⵜⵓⵙⵎⴰⵔⵏ ⵙ
ⵓⵙⵍⵎⴷ ⴰⵏⴰⴼⵍⵍⴰ ⴷ ⵓⵔⵣⵣⵓ ⴰⵎⴰⵙⵙⴰⵏ

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي
كتابة الدولة المكلفة بالتعليم العالي والبحث العلمي

Royaume du Maroc
Ministère de l'Education Nationale, de la Formation Professionnelle, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

المدرسة الوطنية للتجارة و التسيير - مراكش
ECOLE NATIONALE DE COMMERCE ET DE GESTION - MARRAKECH

PRESIDENCE DU CNAEM 2019

CONCOURS NATIONAL D'ACCES AUX ECOLES DE MANAGEMENT

CNAEM

EDITION 2019

MATIERE: MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

FILIERE : ECS

Durée : 4h

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde

<u>Note à lire par le candidat</u> :

L'usage de la calculatrice est interdit.

Page de garde

<u>Durée : 4 heures</u>

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision <u>les références</u> des questions abordées. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Remarques générales:

L'épreuve se compose de trois problèmes indépendants.

★ ★ ★ ★ ★

Problème 1

On considère les matrices suivantes $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 0 \\ -2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 25 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice relativement à la base β. On rappelle que $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels et $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices à 3 lignes et une seule colonne, à coefficients réels.

Partie 1
Calcul des puissances de A

1. Posons $\beta' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ la famille de vecteurs de E définie par $\begin{cases} e'_1 = -3e_2 + 7e_3 \\ e'_2 = e_1 + 8e_2 - 27e_3 \\ e'_3 = e_3 \end{cases}$

   a) Vérifier que e'_1, e'_2 et e'_3 sont des vecteurs propres de f associés respectivement à $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4$ et $\lambda_3 = 6$.

   b) Montrer que β' est une base de $\mathbb{R}^3$.

   c) En déduire que l'endomorphisme f est diagonalisable.

   d) Déterminer la matrice P de passage de la base β à la base β'.

   e) Montrer qu'il existe une matrice diagonale notée D à préciser telle que $A = PDP^{-1}$.

2. Déterminer pour tout entier naturel n, A^n en fonction de P, D et n, justifier votre réponse.

3. Vérifier que $PQ = 3I$ et en déduire P^{-1} l'inverse de la matrice P.

4. En déduire pour tout entier naturel n, l'expression de A^n sous la forme d'un tableau.

5. Dans cette question, on considère dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, l'équation matricielle d'inconnue N,
$$(E): \quad N^2 = D.$$

   a) Montrer qu'une matrice carrée N d'ordre 3 à coefficients réels, commute avec D si, et seulement si, N est une matrice diagonale.

   b) Montrer que si N est une matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels telle que $N^2 = D$, alors N et D commutent.

   c) En déduire la solution de l'équation (E) dont toutes les valeurs propres sont positives.

   d) En déduire la solution dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de l'équation matricielle $M^2 = A$, d'inconnue M, dont toutes les valeurs propres sont positives.

Partie 2

Application en probabilité

Un mobile se déplace à chaque unité de temps sur les quatre sommets d'un carré, numérotés 1, 2, 3 et 4. Au départ (à l'instant $n = 0$), le mobile se trouve sur le sommet 1, après le mobile se déplace de la façon suivante :

i) Si à l'instant n ($n \geq 0$), le mobile se trouve sur le sommet 1, il sera à l'instant $n+1$ sur le sommet 1 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et sur le sommet 2 avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

ii) Si à l'instant n ($n \geq 1$), le mobile se trouve sur le sommet 2, il sera à l'instant $n+1$ sur le sommet 2 avec la probabilité $\frac{1}{4}$ et sur le sommet 3 avec la probabilité $\frac{3}{4}$.

iii) Si à l'instant n ($n \geq 1$), le mobile se trouve sur le sommet 3, il sera à l'instant $n+1$ sur le sommet 3 avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et sur le sommet 4 avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

iv) Si à l'instant n ($n \geq 1$), le mobile se trouve sur le sommet 4, il sera à l'instant $n+1$ sur le sommet 3 avec la probabilité $\frac{1}{6}$ et sur le sommet 4 avec la probabilité $\frac{5}{6}$.

Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet occupé par le mobile à l'instant n. Nous rappelons que $P([X_0 = 1]) = 1$.

1. a) Déterminer la loi de X_1.

   b) Calculer l'espérance $E(X_1)$ et la variance $V(X_1)$ de X_1.

2. a) Montrer, en utilisant la formule des probabilités totales, que pour tout entier naturel n, $P([X_{n+1} = 1]) = \frac{1}{3}P([X_n = 1])$.

   b) Montrer, en utilisant la formule des probabilités totales, que pour tout entier naturel n, $P([X_{n+1} = 2]) = \frac{2}{3}P([X_n = 1]) + \frac{1}{4}P([X_n = 2])$.

   c) Exprimer de même, pour tout entier naturel n, $P([X_{n+1} = 3])$, $P([X_{n+1} = 4])$ en fonction de $P([X_n = 1])$, $P([X_n = 2])$, $P([X_n = 3])$ et $P([X_n = 4])$.

   d) Justifier que pour tout entier naturel n, $P([X_n = 1]) + P([X_n = 2]) + P([X_n = 3]) + P([X_n = 4]) = 1$.

3. On pose $B = \frac{1}{12}A$ et $C = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et on note pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} P([X_n = 1]) \\ P([X_n = 2]) \\ P([X_n = 3]) \end{pmatrix}$.

   a) Montrer que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = BU_n + C$.

   b) Recopier et compléter le programme Scilab suivant afin qu'il affiche U_n, l'entier n étant donné par l'utilisateur.

```
n=input(.......................................)
A=.........................................
C=.........................................
U=.........................................
for i = ..................................
   U=.....................................
end
disp(...................)
```

   c) Déterminer la matrice colonne L de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $L = BL + C$.

   d) Montrer que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} - L = B(U_n - L)$.

   e) En déduire par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n - L = B^n(U_0 - L)$.

4. Déterminer pour tout entier naturel n, $P([X_n = 1])$, $P([X_n = 2])$, $P([X_n = 3])$ en fonction de n.

5. En déduire $\lim_{n \to +\infty} P([X_n = 4])$.

Problème 2

Soit f la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, par $f(t,x)=\begin{cases} 0 & \text{si } t\leq 0 \\ \frac{1}{\pi t^{\frac{x}{2}}(1+t)} & \text{si } t>0 \end{cases}$.

Partie 1

Etude d'une densité

On pose, pour tout réel t, $g(t)=f(t,1)=\begin{cases} 0 & \text{si } t\leq 0 \\ \frac{1}{\pi\sqrt{t}(1+t)} & \text{si } t>0 \end{cases}$

1. a) Justifier que l'intégrale $I=\int_0^{+\infty} g(t)dt$ converge.

   b) Montrer que $I=1$, on pourra utiliser le changement de variable $u=\sqrt{t}$.

   c) Justifier que la fonction g est une densité de probabilité.

   Dans toute la suite, X désigne la variable aléatoire admettant g pour densité.

2. Montrer, en utilisant le changement de variable $u=\sqrt{t}$, que la fonction de répartition de X est la fonction notée F_X définie sur $\mathbb{R}$ par $F_X(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\leq 0 \\ \frac{2}{\pi}\arctan(\sqrt{x}) & \text{si } x>0 \end{cases}$.

3. Déterminer l'unique valeur m, appelée la médiane de X, telle que $P(X\leq m)=P(X\geq m)$.

4. Écrire un programme en Scilab qui détermine et affiche le plus petit entier naturel n tel que, $F_X(n)\geq 1-10^{-6}$.

Partie 2

Etude d'une fonction définie par une intégrale

1. Soit $t\in]1,+\infty[$ et soit la fonction φ définie sur $]0,2[$ par $\varphi(x)=t^{\frac{x}{2}}+t^{1-\frac{x}{2}}$

   a) Vérifier que φ est dérivable sur $]0,2[$ et que sa dérivée notée φ' est définie sur $]0,2[$ par $\varphi'(x)=\frac{\ln(t)}{2}(t^{\frac{x}{2}}-t^{1-\frac{x}{2}})$.

   b) En déduire les variations de φ.

2. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t,x)dt$ converge si, et seulement si, $x\in]0,2[$.
   Dans toute cette partie, on étudie la fonction h définis sur $]0,2[$ par $h(x)=\int_0^{+\infty} f(t,x)dt$ et on désigne par $(\mathcal{C}_h)$ la courbe représentative de h dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

3. a) Montrer que pour tout réel x dans $]0,2[$, $h(2-x)=h(x)$, vous pouvez faire le changement de variable $u=\frac{1}{t}$.

   b) Montrer que pour tout réel x dans $]0,2[$ et pour tout réel y, les deux points $M(x,y)$ et $M'(2-x,y)$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $x=1$.

   c) Justifier que la droite d'équation $x=1$ est un axe de symétrie de la courbe représentative $(\mathcal{C}_h)$.

4. a) Montrer que pour tout réel x dans $]0,1]$, $h(x)-\int_1^{+\infty}\frac{dt}{\pi t^{\frac{x}{2}+1}}=\int_0^1\frac{dt}{\pi t^{\frac{x}{2}}(t+1)}-\int_1^{+\infty}\frac{dt}{\pi t^{\frac{x}{2}+1}(t+1)}$.

   b) Montrer que pour tout réel x dans $]0,1]$, $0\leq\int_0^1\frac{dt}{t^{\frac{x}{2}}(t+1)}\leq\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{t}}$.

   c) i) Montrer que pour tout réel x dans $]0,1]$ et pour tout réel t dans $[1,+\infty[$, $0<\frac{1}{t^{\frac{x}{2}+1}(1+t)}\leq\frac{1}{t^{\frac{x}{2}+2}}$.

      ii) En déduire que pour tout réel x dans $]0,1]$, $0\leq\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{\frac{x}{2}+1}(t+1)}\leq\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$.

   d) Montrer que pour tout réel x dans $]0,1]$, $\left|h(x)-\frac{2}{\pi x}\right|\leq\frac{3}{\pi}$.

   e) En déduire que $h(x)$ est équivalent à $\frac{2}{\pi x}$ à droite de 0.

   f) En déduire la limite de $h(x)$ quand x tend vers 0 à droite.

5. Montrer que pour tout réel x dans $]0,2[$, $h(x)=\int_1^{+\infty}\frac{t^{\frac{x}{2}}+t^{1-\frac{x}{2}}}{\pi t(t+1)}dt$, (vous pouvez effectuer le changement de variable $u=\frac{1}{t}$ dans l'intégrale $\int_0^1\frac{dt}{\pi t^{\frac{x}{2}}(t+1)}$).

6. En déduire les variations de h sur $]0,2[$.

Problème 3

Soit a un nombre réel quelconque et soit f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ e^{-(t-a)} & \text{si } t \geq a \end{cases}.$$

Partie 1

Etude de quelques variables aléatoires

1. Montrer que pour tout réel a, f_a est une densité de probabilité.
   Par la suite, on désigne par X_a la variable aléatoire réelle de densité f_a.
2. Déterminer l'espérance $E(X_a)$ et la variance $V(X_a)$ de la variable aléatoire X_a.
3. Déterminer la fonction de répartition F_{X_a} de X_a.
4. En déduire la valeur du réel m tel que $P(X_a \leq m) = P(X_a \geq m)$.
5. On pose pour tout réel a, la variable aléatoire Y_a définie par $Y_a = X_a - a$
   a) Déterminer la fonction de répartition F_{Y_a} de Y_a.
   b) Déterminer l'espérance $E(Y_a)$ et la variance $V(Y_a)$ de la variable aléatoire Y_a.
6. On considère n variables aléatoires $X'_1, X'_2, \dots, X'_n$, mutuellement indépendantes et de même loi que X_a, (n est un entier supérieur ou égal à 2).
   On pose $S_n = X'_1 + \ldots + X'_n$ et $T_n = \min(X'_1, \dots, X'_n)$.
   a) Déterminer l'espérance $E(S_n)$ et la variance $V(S_n)$ de la variable aléatoire S_n.
   b) Déterminer la fonction de répartition F_{T_n} de T_n.
   c) En déduire une densité $g_{n,a}$ de la variable aléatoire T_n.
   d) Déterminer l'espérance $E(T_n)$ et la variance $V(T_n)$ de la variable aléatoire T_n.
7. Soit U une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$. On note, pour tout réel a, $Z_a = \exp(1-U) + a$.
   Écrire, en language Scilab, une fonction **simulation**, de paramètre m, n et a, qui renvoie une matrice à m lignes et n colonnes contenant $m.n$ réalisations de Z_a, (on rappelle que la commande rand(m,n) renvoie une matrice à m lignes et n colonnes dont les entrées sont les réalisations d'une loi uniforme sur $[0,1]$.

Partie 2

Exemples d'estimations

On considère pour tout entier naturel non nul n, la variable aléatoire $U_n = \frac{S_n}{n} - T_n$.

1. a) Déterminer le biais $b(T_n)$ de T_n en tant qu'estimateur de a.
   b) Déterminer le risque quadratique $r(T_n)$ de T_n en tant qu'estimateur de a, (on rappelle que le risque quadratique $r(T_n) = (b(T_n))^2 + V(T_n))$.
   c) Montrer que $(T_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'estimateurs de a asymptotiquement sans biais et convergente.
2. a) Déterminer, pour tout entier naturel non nul n, $E(U_n)$ l'espérance de U_n.
   b) Déterminer le biais $b(U_n)$ de U_n en tant qu'estimateur de 1.
   c) Montrer que le risque quadratique $r(U_n)$ de U_n est définie comme suit : $r(U_n) = \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n} - \frac{2}{n}\text{Cov}(S_n, T_n)$.
   d) Montrer que $\text{Cov}(S_n, T_n)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$,
   $\Big($on poura utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\text{Cov}(S_n, T_n)| \leq \sqrt{V(S_n)}\sqrt{V(T_n)}\Big)$.
   e) En déduire que $(U_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'estimateurs de a asymptotiquement sans biais et convergente.

FIN DE L'ÉPREUVE

★ ★ ★ ★ ★