Prof. Mamouni
myismail.net
Prépas ECG 2

Feuille d'Exercices : Réduction

Exercice 5.1 *Exemple de projecteurs*

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace des polynômes de degré au plus 3 à coefficients réels.

1. Montrer que $\varphi : E \longrightarrow E,\ P \longmapsto \dfrac{P(X)+P(-X)}{2}$ est un projecteur de E.

2. En déduire que $\mathcal{I} = \{P \in E, P(-X) = -P(X)\}$ et $\mathcal{P} = \{P \in E, P(-X) = P(X)\}$ sont deux sous-espaces supplémentaires.

3. Déterminer $M = mat_{(1,X,X^2,X^3)}(\varphi)$ et calculer M^2. Observer.

4. Montrer que $\psi = id_E - \varphi$ est un projecteur.

Exercice 5.2 *Exemple de réduction d'endomorphismes*

Soit $E = \mathbb{R}^3$, f un endomorphisme de E et A la matrice de f dans la base canonique de E. Dans chacun des cas suivants, déterminer si f est diagonalisable, en précisant une base de chacun de ses sous-espaces propres.

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 \\ -1 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$;

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

3. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

Réponses :

1. $Sp(f) = \{-1, 1, 2\}$, $E_{-1} = Vect((-2,1,2))$, $E_1 = Vect((-1,1,1))$, $E_2 = Vect((-2,1,1))$, f diagonalisable.

2. $Sp(f) = \{1, 2\}$, $E_1 = Vect((1,0,-1),(0,1,0))$, $E_2 = Vect((-2,1,1))$, f diagonalisable.

3. $Sp(f) = \{1, 2\}$, $E_1 = Vect((-1,1,1))$, $E_2 = Vect((-2,1,1))$, f non-diagonalisable.

4. $Sp(f) = \{1\}$, $E_1 = Vect((-1,0,1))$, f non-diagonalisable.

Exercice 5.3 *Trigonalisation et calcul de puissances*

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres associés de f.

2. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. On pose : $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer, pour tout k de $\mathbb{N}$, N^k.

4. *Calcul de M^n, première méthode*
À l'aide de la formule du binôme, calculer D^n puis M^n pour tout entier naturel n.

5. *Calcul de M^n, seconde méthode*

a) Déduire de **3.** un polynôme Q de degré 3 annulateur de f.

b) Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par Q et en déduire M^n pour tout entier naturel n.

Exercice 5.4 *Dans un espace de polynômes*

$E = \mathbb{R}_2[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré au plus 2.
Soit f l'application qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$, associe le polynôme défini par :

$$Q(X) = P(X+1) + XP'(X)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Donner la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

3. f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$?

4. **a)** Quelles sont les valeurs propres de f ? f est-il diagonalisable ?

b) Déterminer une base $\mathcal{C}$ de E formée de vecteurs propres de f.

c) Quelles sont les coordonnées du polynôme $Q(X) = X^2 + X + 1$ dans la base $\mathcal{C}$.

Exercice 5.5 *Structure de l'ensemble des polynômes annulateurs d'une matrice*

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On note $\mathcal{A}$ l'ensemble $\{P \in \mathbb{K}[X], P(M) = 0\}$ des polynômes annulateurs de M.

1. **a)** Justifier que la famille $(M^k)_{k \in [\![0\,;\,n^2]\!]}$ est liée.

b) En déduire que $\mathcal{A}$ contient au moins un polynôme non nul.

2. **a)** Soit $d \overset{\text{déf.}}{=} \min\{\deg(P), D \in \mathcal{A} \setminus \{0\}\}$, autrement dit, d est le degré minimum des polynômes non nuls de $\mathcal{A}$.
Justifier qu'il existe dans $\mathcal{A}$ un polynôme unitaire (*i.e.* de coefficient dominant égal à 1) de degré d.
On le note P_M et on l'appelle le *polynôme minimal de* M.

3. **a)** Montrer que tout polynôme de $\mathcal{A}$ est multiple de P_M, c'est-à-dire

$$P \in \mathcal{A} \Rightarrow \exists Q \in \mathbb{K}[X], P = QP_M.$$

b) Justifier l'unicité du polynôme P_M défini en 3.

4. Montrer enfin que : $\mathcal{A} = \{QP_M, Q \in \mathbb{K}[X]\}$.
Ainsi, $\mathcal{A}$ est exactement l'ensemble des multiples du polynôme minimal de M.

Exercice 5.6 *Diagonalisation des matrices circulantes*

Soit n un entier naturel au moins égal à 2.
On note C_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$C_n \overset{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Chaque ligne est obtenue en circulant la ligne précédente d'un cran vers la droite.

On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et φ_n l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à C_n.

1. *Inversibilité et inverse*

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique.

a) Justifier que C_n est une matrice orthogonale.

b) En déduire son inversibilité et son inverse.

2. *Diagonalisation dans le cas n=2*

Diagonaliser C_2 en précisant ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

3. *Un polynôme annulateur*

On revient au cas général, avec $n \geqslant 2$.

a) Pour $k \in [\![2\,;\,n]\!]$, que vaut $\varphi_n^{k-1}(e_k)$?
Et pour $j \in [\![1\,;\,n-1]\!]$, $\varphi_n^j(e_1)$?

b) En déduire φ_n^n, puis un polynôme annulateur de C_n.

4. *Racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité*

Dans cette question, on cherche les racines de $X^n - 1$.

a) Soit $z = re^{it}$ avec $r \in \mathbb{R}^+$ et $t \in \mathbb{R}$.

Montrer que $z^n = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z}, nt = 2\pi k \end{cases}$

b) En déduire toutes les racines de $X^n - 1$, appelées racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.

5. *Diagonalisation dans le cas général*

a) Déduire des questions précédentes que C_n est diagonalisable, en précisant ses éléments propres.

b) Pour quelle(s) valeur(s) de n C_n est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

6. *Matrices circulantes quelconques d'ordre 3*

Pour $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, on note

$$M_{a,b,c} \overset{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{T} \overset{\text{déf.}}{=} \left\{M_{a,b,c}, (a,b,c) \in \mathbb{C}^3\right\}.$$

a) Montrer $\mathcal{T}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ admettant (I_3, C_3, C_3^2) pour base.

b) Montrer que les vecteurs propres de C_3 sont des vecteurs propres des matrices de $\mathcal{T}$.

c) En déduire que les matrices $M_{a,b,c}$ de $\mathcal{T}$ sont diagonalisables, en précisant leurs valeurs propres en fonction des coefficients a, b et c.

d) Dans cette ultime question, on suppose a, b et c réels.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que $M_{a,b,c}$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 5.7 *Exemple de diagonalisation par blocs*

1. *Étude d'un exemple dans $\mathbb{R}^3$*

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(x, y, z) = (x - y, x - 2y + z, x - 4y + 2z).$$

a) Vérifier que $P = (X^2 + 1)(X - 1)$ est un polynôme annulateur de f.

b) En déduire les valeurs propres de f. Est-il diagonalisable ?

c) On pose $F = \operatorname{Ker}(f - id)$ et $G = \operatorname{Ker}(f^2 + id)$.
Montrer que F et G sont supplémentaires et stables par f.

d) Donner une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice représentant f dans $\mathcal{C}$ s'écrive

$$mat_{\mathcal{C}}(f) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

2. *Une généralisation*

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3 et f un endomorphisme de E tel que

$$f \neq id_E, \qquad 1 \in \operatorname{Sp}(f) \qquad \text{et} \qquad P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)},$$

où P désigne toujours le polynôme $(X^2 + 1)(X - 1)$.
On pose à nouveau $F = \operatorname{Ker}(f - id)$ et $G = \operatorname{Ker}(f^2 + id)$.

a) Montrer que F et G sont en somme directe.

b) Soit $u \in E$. On pose $x = f^2(u) + u$ et $y = f^2(u) - u$.

i. Montrer que $x \in F$ et $y \in G$.

ii. Montrer que F et G sont supplémentaires.

c) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C}$ de E telle que la matrice représentant f dans $\mathcal{C}$ s'écrit

$$mat_{\mathcal{C}}(f) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$