Prof. Mamouni
myismail.net
Prépas ECG 2

ELBILIASUP

Feuille d'Exercices : Réduction

Exercice 1 :

1. Déterminer les éléments propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et en déduire si elle est diagonalisable.

2. Montrer qu'elle est semblable à

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Calculer B^n et A^n pour tout entier relatif n.

Exercice 2 :

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et f l'application qui à tout élément P de X associe le reste de la division euclidienne par $X^4 - X$ de $P(X)\left(X^4 - 1\right)$.

1. Montrer que f est est un endomorphisme de E et donner sa matrice dans la base canonique de E.
2. En déduire les éléments propres de f.

Exercice 3 :

Soit n un entier supérieur ou égal à 3 et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère l'application f qui à tout élément P de X associe

$$\left(X^2+1\right) P"(X) - 2XP'(X).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E
2. Donner la matrice dans la base canonique de E, $\mathcal{B} = (1, X, .., X^n)$ et en déduire le spectre de f et son cardinal.
3. Montrer que le noyau de f est inclus dans $\mathbb{R}_3[X]$ puis que $\ker f = \operatorname{Vect}\left(1, X^3 + 2X\right)$.
4. Déterminer $\ker(f + 2Id_E)$.
5. En déduire que f est diagonalisable.

Exercice 4 :

Soit n un entier non nul. On cherche les racines $n^{ème}$ de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les éléments propres de A.
2. Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^n = A$.
   a. Montrer que B commute avec A .
   b. En déduire que les vecteurs propres de A sont les vecteurs propres de B et que B est triangulaire inférieure.
   c. Prouver l'existence de trois réels (a, b, c) tels que

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

3. En déduire les racines $n^{ème}$ de A.