Prof. MAMOUNI
myismail.net

Applications linéaires

Exercice 1: *pour s'entraîner*

Donner les matrices des applications suivantes par rapport aux bases canoniques des espaces de départ et d'arrivée.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (2x - y, x + y, x)$
2. $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z, t) \mapsto (x + y, z + t)$
3. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto (x, 2x, x)$
4. $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto 2x - z$.

Exercice 2:

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ définie par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f((x, y)) = (4x - 6y, x - y)$.

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer la matrice de f relativement à la base ((1,1),(1,-1)) (départ) et à la base canonique (arrivée).
3. Déterminer la matrice de f relativement à la base canonique (départ) et à la base ((1,1),(1,-1)) (arrivée).
4. Déterminer la matrice de f dans la base $((2, 1), (3, 1))$.

Exercice 3:

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et on définit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à A.

1. Déterminer $f((x, y, z))$ pour tout triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ via 2 méthodes.
2. Déterminer le noyau de f via 2 méthodes puis l'image de f. La première question était-elle nécessaire ?
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est B.

Exercice 4:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit f définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$ par $f(P) = xP'$.

1. Vérifier que f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$ puis écrire sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. f est-il un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$? Déterminer une base de $Im(f)$ puis une base de $Ker(f)$.

Exercice 5:

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On considère l'application $\varphi : \forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \varphi(M) = AM - MA$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer la matrice B de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. En déduire une base de $Ker\varphi$ et une base de $Im\varphi$.

Exercice 6:

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire canoniquement associée à M. Déterminer le noyau et l'image de f. *On privilégiera la méthode matricielle.*
2. Soit $g : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ est M. Déterminer le noyau et l'image de g.*On privilégiera la méthode matricielle pour utiliser les calculs faits au 1.*
3. Soit E un espace vectoriel de dimension 3, et $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ une base de E. On introduit h l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est M. Déterminer le noyau et l'image de h.

Refaire alors cet exercice avec la matrice $M = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 7: `Eml S 96`

Soit n un entier naturel fixé supérieur ou égal à 2. On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et soit Φ l'application qui, à tout polynôme P de E, associe le polynôme $\Phi(P)$ défini par $\Phi(P) = 3xP' + (x^2 - 1)P''$

1. Vérifier que Φ est un endomorphisme de E.
2. Ecrire la matrice de Φ dans la base canonique de E.
3. Φ est-elle un isomorphisme ? Déterminer alors $Ker(\Phi)$ et $Im(\Phi)$.

Exercice 8: *un peu plus abstrait ...*

Soit E un espace de dimension 3, et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $f^2 \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. Montrer qu'il existe $u \in E$ tel que la famille $(u, f(u), f^2(u))$ soit une base de E.
2. Ecrire la matrice de f dans cette base.
3. Généraliser ce résultat lorsque E est de dimension n et que $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Exercice 9:

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et p un projecteur de E.
Déterminer la matrice de p dans une base adaptée à la somme directe $E = Ker(p) \bigoplus Im(p)$.

Exercice 10:

Soit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $Kerf$ puis Imf.
2. Montrer que f est un projecteur que l'on précisera.

Exercice 11: `Eml S 2007`

On note n un entier naturel fixé supérieur ou égal à 2, E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et Φ l'application qui, à tout polynôme P de E, associe le polynôme $\Phi(P)$ défini par $\Phi(P) = ((x^2-1)P)''$.

1. Vérifier que Φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer la matrice M de Φ dans la base canonique de E.
3. Montrer que Φ est un isomorphisme de E.
4. Dans le cas $n = 2$, déterminer Φ^{-1} à l'aide de la représentation matricielle.
   Comment aurait-on pu faire autrement ?

Exercice 12:

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B}' = \{(1,1),(1,2)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Déterminer la matrice de f dans $\mathcal{B}' = \{(1,1),(1,2)\}$. *On essaiera les deux méthodes.*
2. Même question avec $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, et $\mathcal{B}' = \{(1,0,1),(1,2,0),(0,1,1)\}$

Exercice 13:

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base fixée de $\mathbb{R}^3$, soit $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ où l'on a posé $v_1 = -e_1$, $v_2 = 2e_2 + e_3$ et $v_3 = -e_2$.
Et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la matrice dans la base $\mathcal{B}$ suivante : $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $Mat_{\mathcal{C}(f)}$.

Exercice 14:

Soit f l'endormorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par sa matrice dans la base canonique $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

1. On pose $e_1 = (-2,1,0)$, $e_2 = (-1,1,-1)$ et $e_3 = (0,0,1)$. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice P de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$.
   Vérifier que P est inversible et déterminer son inverse.
3. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Que remarquez-vous ?
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la matrice de f^n dans la base canonique. En déduire l'expression de f^n.

Exercice 15:

Déterminer le rang des matrices suivantes :

1. $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ 2. $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 3. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ 4. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5. $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 6. $M = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 7. $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Vérification avec python : bibliothèque `numpy.linalg` syntaxe `al.rank(...)`.

Exercice 16: *on complique ...*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On définit pour tout réel a l'endomorphisme Φ_a de E par $\Phi_a(e_1) = e_1 + 2e_2 + e_3$, $\Phi_a(e_2) = -e_1 + (a-3)e_2 + (a-1)e_3$ et $\Phi_a(e_3) = -2e_1 - 4e_2 + ae_3$

1. Ecrire la matrice de Φ_a dans la base $\mathcal{B}$
2. Montrer que Φ_0 est un isomorphisme et déterminer la matrice de sa réciproque, dans la base $\mathcal{B}$.
3. (a) Déterminer les valeurs du paramètre a pour lesquelles Φ_a est un isomorphisme.
   (b) Déterminer, pour chaque valeur du paramètre a, le noyau de Φ_a.
   (c) * Déterminer les valeurs de a pour lesquelles le vecteur $e_1 - e_2 - e_3$ appartient à l'image de Φ_a.
4. On considère maintenant les trois vecteurs : $f_1 = e_1 + 3e_2 - e_3$, $f_2 = 2e_1 + 4e_2 - e_3$, $f_3 = e_3$.
   Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de E et déterminer la matrice de Φ_1 dans cette base.

Exercice 17:

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le rang de f.
2. Sans calculs, donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
4. Déterminer B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
5. * On pose $M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   On commencera par écrire M en fonction de A, puis en fonction de B ....

Exercice 18:
Rappel : Définition : une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite inversible si

Le but de cet exercice est de faire la preuve de la proposition vue dans le chapitre matrices :
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n$, alors A est inversible et $B = A^{-1}$.

Soit A une matrice $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour laquelle il existe bien une matrice $B \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n$.
On notera $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (resp. g) l'endomorphisme associé à A (resp. à B)

1. Quelle relation relie f et g ?
2. Montrer alors que f est surjective. *bonus* : montrer que g est injective.
3. En déduire que f est bijective et que $g = f^{-1}$
4. Conclure.

Révisions polynômes annulateurs
Exercice 19:

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Trouver un polynôme annulateur de A de degré 2, que l'on notera P.
2. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1} en fonction de A et I.
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de $x \mapsto x^n$ par P, où $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire A^n en fonction de A et I, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 20:
Soit p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E vérifiant $p \circ q = q \circ p = 0$ et $p + q = id_E$ et soit f l'endomorphisme de E défini par : $f = 3p - q$.

1. Vérifier que $P : x \mapsto x^2 - 2x - 3$ est un polynôme annulateur de f.
2. En déduire que f est bijectif et déterminer f^{-1} en fonction de f et id_E.

Pour aller plus loin
Exercice 21:
Montrer que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang 1 ssi il existe deux matrice lignes non-nulles $U, V \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telles que $M = {}^tUV$.

Exercice 22: `Edhec ast1 2003 :`
Soit h un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de rang 1.

1. ** Montrer que h satisfait une et une seule des deux propriétés suivantes :
   (A) $Im(h) \oplus Ker(h) = \mathbb{R}^3$ (B) $Im(h) \subset Ker(h)$.
2. On suppose que h satisfait la propriété (A). Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de h est égale à $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où λ est un nombre réel non nul. Que vaut alors h^2?
3. On suppose que h satisfait la propriété (B). Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de h est égale à $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Que vaut alors h^2?