

Diagonalisation

Td Extraits Ecricome

Mathématiques approfondies - Sujet zéro 1

Exercice 1 : 2023

Soit E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E .

On notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de E , et $\| \cdot \|$ la norme associée.

Pour tout sous-espace vectoriel F de E , on notera $F^\perp$ l'orthogonal de F pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Partie I

Dans cette partie, on note g l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la matrice A^2 , puis la matrice A^3 .
Déterminer un réel $\alpha > 0$ tel que : $A^3 = -\alpha^2 A$.
2. Démontrer que 0 est valeur propre de g , et déterminer un vecteur v_1 de norme 1 tel que (v_1) soit une base de l'espace propre de g associé à la valeur propre 0.
3. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de g .
4. L'endomorphisme g est-il bijectif ? Est-il diagonalisable ?

Exercice 2 : 2022

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

On dit qu'un endomorphisme h est nilpotent quand il existe un entier naturel p tel que h^p soit l'endomorphisme nul.

L'objectif de ce problème est de montrer que f est la somme de deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ qui commutent, dont l'un est diagonalisable et l'autre est nilpotent.

1. (a) Vérifier que -1 et 2 sont des valeurs propres de f et déterminer les sous-espaces propres associés.
(b) On suppose que f est diagonalisable.
En étudiant la trace de A , aboutir à une contradiction.
Que peut-on en déduire sur f ?

①

EXERCICE 1 : 2021

Partie 1 : Étude de trois matrices

On note A , J et S les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que $A^3 = -3A$. En déduire que $Sp(A) = \{0\}$.
La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Justifier que J et S sont diagonalisables, et vérifier que $SJ = JS$.
3. On admet que $Sp(S) = \{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$. Montrer que tout vecteur propre de S est vecteur propre de J .
4. En déduire qu'il existe une matrice P inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (qu'on ne demande pas de déterminer) telle que $P^{-1}SP$ et $P^{-1}JP$ soient diagonales.

Partie 2 : Étude des matrices magiques

Soit $n \geq 3$. On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **magique** quand les sommes des coefficients de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale sont égales. Ainsi en notant :

- $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$,
- pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $\ell_i(M) = \sum_{j=1}^n m_{i,j}$,
- pour tout j de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $c_j(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,j}$,
- $d_1(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,i}$ et $d_2(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,n-i+1}$,

alors :

$$M \text{ est magique si et seulement si : } \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \ell_i(M) = c_j(M) = d_1(M) = d_2(M).$$

Si M est une matrice magique, la valeur de ces sommes est alors notée $s(M)$ et appelée **somme** de la matrice M .

On note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices réelles magiques d'ordre n , et on admet que $\mathcal{E}_n$ ainsi défini est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5. Montrer que ℓ_1 est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On admettra dans la suite que, pour tout i de $\llbracket 2, n \rrbracket$ et pour tout j de $\llbracket 1, n \rrbracket$, les applications ℓ_i , c_j , d_1 , d_2 et s sont des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6. On note $\mathcal{K}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{E}_n$ de somme nulle.

Montrer que $\mathcal{K}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}_n$.

7. Soit $M \in \mathcal{E}_n$. Montrer que tM est aussi un élément de $\mathcal{E}_n$ et déterminer $s({}^tM)$.

8. Soit $M \in \mathcal{E}_n$. Montrer qu'il existe un unique réel λ tel que $M - \lambda J_n \in \mathcal{K}_n$, avec $J_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

9. Soit $M \in \mathcal{E}_n$. Montrer que $W_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M et préciser la valeur propre associée.

Partie 3 : Étude du cas où $n = 3$

On se place dans cette partie dans le cas particulier où $n = 3$.

10. Vérifier que les matrices A , J et S définies dans la partie 1 sont magiques, et déterminer leur somme.
11. Montrer que pour toute matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, il existe un unique couple $(M_1, M_2) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2$ tel que :

$$M = M_1 + M_2, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} M_1 \text{ antisymétrique,} \\ M_2 \text{ symétrique.} \end{cases}$$

On explicitera notamment M_1 et M_2 en fonction de M .

12. Soit $M \in \mathcal{K}_3$. On écrit $M = M_1 + M_2$ selon la décomposition vue en question 11.
 - (a) Montrer que M_1 et M_2 appartiennent à $\mathcal{K}_3$.
 - (b) Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$M_1 = \alpha A \quad \text{et} \quad M_2 = \beta S.$$

13. En déduire une base de $\mathcal{K}_3$, puis montrer que (A, J, S) est une base de $\mathcal{E}_3$.
14. On note $\Delta = \{M \in \mathcal{E}_3 / P^{-1}MP \text{ est diagonale}\}$, où P est la matrice définie dans la partie 1. Montrer que $\Delta = \text{Vect}(J, S)$.

EXERCICE 2 : 2019

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On dit qu'un vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est **symétrique** (respectivement **antisymétrique**) lorsque :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad x_i = x_{n+1-i}, \quad (\text{respectivement } x_i = -x_{n+1-i}).$$

On note F l'ensemble des **vecteurs symétriques** de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et G l'ensemble des **vecteurs antisymétriques** de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On note $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad s_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n+1-j, \\ 0 & \text{si } i \neq n+1-j. \end{cases}$$

Partie A

Dans cette partie et **uniquement dans cette partie**, on étudie le cas particulier où $n = 3$.
La matrice S est alors la suivante :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer S^2 . En déduire les valeurs propres de S .
2. Déterminer une base de F et de G .
Vérifier que F et G sont des sous-espaces propres de S .
3. En déduire que : $F \oplus G = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Partie B

On revient dans la suite dans le cas général où n est un entier supérieur ou égal à 2.

- 4.(a) Expliciter S et justifier que S est diagonalisable.

(b) Calculer SX lorsque $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

- (c) Pour i et j deux entiers de $\llbracket 1, n \rrbracket$, expliciter le coefficient en ligne i et colonne j de S^2 en fonction des coefficients $s_{k,\ell}$ de S .

En déduire que S^2 est la matrice identité d'ordre n .

- 5.(a) Soit X un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Montrer qu'il existe un unique couple (Y, Z) de vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que :

$$Y \in F, \quad Z \in G \quad \text{et} \quad X = Y + Z.$$

- (b) Montrer que F et G sont les sous-espaces propres de S . Préciser les valeurs propres associées.

6. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad a_{i,n+1-j} = a_{n+1-i,j}.$$

On considère λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé.

- (a) Vérifier que $AS = SA$.
- (b) Montrer que SX est un vecteur propre de A .
- (c) On pose $Y = X + SX$. Exprimer AY en fonction de Y et λ .
- (d) En déduire que le sous-espace propre $E_\lambda(A)$ associé à la valeur propre λ de A contient nécessairement un vecteur symétrique non nul ou un vecteur antisymétrique non nul.