Prof. Mamouni
myismail.net
Prépas ECG 2

PRÉPAS ELBILIA
GROUPE ELBILIA - LÉON L'AFRICAIN

Devoir Maison
Algèbre Linéaire

Exercice 1 :

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$; on note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^2$ et θ l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^2$.
On note $\mathcal{B} = (i, j)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
Le but de cet exercice est de trouver les couples (u, v) d'endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ vérifiant les 4 assertions suivantes :
(A_1) : $u^2 = -Id$ (il faut comprendre $u \circ u = -Id$).
(A_2) : $v \neq Id$.
(A_3) : $(v - Id)^2 = \theta$.
(A_4) : $\mathrm{Ker}(u + v - Id) \neq \{0\}$.

(1) Etude d'un exemple.
Vérifier que les endomorphismes u et v dont les matrices dans $\mathcal{B}$ sont respectivement $U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont solutions du problème posé.

On revient au cas général et on considère un couple (u, v) solution du problème.

(2) (a) Montrer que u et v sont des automorphismes de $\mathbb{R}^2$, puis donner u^{-1} et v^{-1} en fonction de u, v et Id.
(b) Pour tout entier naturel n, exprimer v^n comme combinaison linéaire de v et Id.
(c) Établir que : $\mathrm{Im}(v - Id) \subset \mathrm{Ker}(v - Id)$.
(d) En déduire, en raisonnant sur les dimensions, que : $\mathrm{Im}(v - Id) = \mathrm{Ker}(v - Id)$.

(3) Montrer, en raisonnant par l'absurde que $\dim \mathrm{Ker}\,(u + v - Id) = 1$.

(4) Soit (e_2) une base de $\mathrm{Ker}\,(u + v - Id)$ et $e_1 = -u\,(e_2)$.
(a) Montrer que (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.
(b) Donner les matrices de u et v dans cette base.

(5) Donner la conclusion de cet exercice.

Exercice :

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients réels. On confond polynôme de E et fonction polynomiale associée définie sur $\mathbb{R}$.

Soit d l'application définie sur E qui à tout polynôme P , associe le polynôme $d(P) = P'$, où P' désigne la dérivée de P.

(1) Rappeler sans démonstration la dimension de E et la base canonique $\mathcal{B}$ de E.

(2) Montrer que d est un endomorphisme de E et donner la matrice associée à d dans la base $\mathcal{B}$.

(3) Déterminer le noyau de d, $\operatorname{Ker} d$, l'image de d, $\operatorname{Im} d$.

(4) Déterminer les valeurs propres de d ainsi que les espaces propres associés. L'endomorphisme d est-il diagonalisable ?

On désigne par $\left(d^k\right)_{k\geq 0}$, la suite d'endomorphismes de E définie par : $d^0 = I$, où I représente l'endomorphisme identité et, pour tout k de $\mathbb{N}$, $d^{k+1} = d^k \circ d$.
Pour tout k de $\mathbb{N}$, $\operatorname{Ker} d^k$ désigne le noyau de d^k.

(5) (a) Déterminer pour tout entier non nul k, le sous espace $\operatorname{Ker} d^k$ ainsi que sa dimension.
Vérifier que $d\left(\operatorname{Ker} d^k\right) \subset \operatorname{Ker} d^k$.

(b) Soit P un polynôme de degré r. Montrer que la famille $\left(d^k(P)\right)_{0\leq k\leq r}$ est libre.

(6) Dans cette question, on cherche à déterminer les sous espaces vectoriels F de E stables par d.

(a) On suppose que $\dim F = 1$. Montrer que $F = \mathbb{R}_0[X]$.

(b) Soit F un sev de E stable par d. Soit P un élément de F de degré r. Montrer que

$$\mathbb{R}_r[X] \subset F\,.$$

(c) En déduire les sev de E stables par f.

Exercice 1 :

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$; on note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^2$ et θ l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^2$.
On note $\mathcal{B} = (i, j)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
Le but de cet exercice est de trouver les couples (u, v) d'endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ vérifiant les 4 assertions suivantes :
(A_1) : $u^2 = -Id$ (il faut comprendre $u \circ u = -Id$).
(A_2) : $v \neq Id$.
(A_3) : $(v - Id)^2 = \theta$.
(A_4) : $\mathrm{Ker}(u + v - Id) \neq \{0\}$.

(1) Etude d'un exemple.
La matrice de u^2 dans la base $\mathcal{B}$ est

$$U^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -I_2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} Id$$

donc $u^2 = -Id$.
Comme la matrice de v dans la base $\mathcal{B}$ est différente de I_2, v n'est pas l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^2$.
La matrice de $(v - Id)^2$ dans la base $\mathcal{B}$ est

$$(V - I_2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} \theta$$

donc $(v - Id)^2 = \theta$.
L'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ $u + v - Id$ est injectif si et seulement si sa matrice dans la base $\mathcal{B}$,$U + V - I_2$, l'est. Or,

$$U + V - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui n'est pas injective car $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un élément non nul de son noyau. Par conséquent,

$$\mathrm{Ker}(u + v - Id) \neq \{0\} \ .$$

Les assertions (A_1), (A_2), (A_3) et (A_4) sont vérifiées.

On revient au cas général et on considère un couple (u, v) solution du problème.

(2) (a) Par définition, u et v sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}^2$. Montrons leur injectivité.
Soit $x \in \mathrm{Ker} u$ alors $u(x) = 0$ donc $u^2(x) = 0 = -Id(x) = -x$.
Ainsi, le noyau de l'endomorphisme u est réduit au vecteur nul.
Soit $x \in \mathrm{Ker} v$ alors $v(x) = 0$ donc $(v - Id)^2(x) = v^2(x) - 2v(x) + Id(x) = x = \theta(x) = 0$.
Ainsi, le noyau de l'endomorphisme v est réduit au vecteur nul.
Donc u et v sont deux automorphismes de $\mathbb{R}^2$.

La relation $u^2 = -Id$ implique que $u \circ (-u) = (-u) \circ u = Id$ donc $u^{-1} = -u$.

La relation $(v - Id)^2 = \theta$ implique que $2v - v^2 = Id = (2Id - v) \circ v = v \circ (2Id - v) = Id$ donc

$$v^{-1} = 2Id - v\,.$$

(b) Soit n un entier. Le polynôme $P = X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de v.
Par division euclidienne de X^n par P, il existe un polynôme Q_n et des entiers $a_n$et b_n tels que

$$X^n = PQ_n + a_n X + b_n\,.$$

Par conséquent, $v^n = a_n v + b_n Id$.
Il ne reste plus qu'à déterminer a_n et b_n. Pour cela, on évalue la relation $X^n = PQ_n + a_n X + b_n$ ainsi que sa dérivée $nX^{n-1} = P'Q_n + PQ_n' + a_n$ en la racine double de P : 1. On obtient

$$\begin{cases} 1 = a_n + b_n \\ n = a_n \end{cases}$$

Par suite, $a_n = n$ et $b_n = 1 - n$. Donc

$$v^n = nv + (1-n)\,Id\,.$$

(c) Soit $x \in \mathrm{Im}(v - Id)$ alors il existe $t \in \mathbb{R}^2$ tel que $x = (v - Id)\,(t)$. Ainsi,

$$(v - Id)\,(x) = (v - Id) \circ (v - Id)\,(t) = (v - Id)^2\,(t) = \theta\,(t) = 0$$

donc $x \in \mathrm{Ker}(v - Id)$.
Donc

$$\mathrm{Im}(v - Id) \subset \mathrm{Ker}(v - Id)\,.$$

(d) D'après la question précédente, $\dim \mathrm{Im}(v - Id) \le \dim \mathrm{Ker}(v - Id)$. Comme $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie, le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme $v - Id$ donne

$$\dim \mathrm{Im}(v - Id) + \dim \mathrm{Ker}(v - Id) = 2\,.$$

Ainsi,

$$\dim \mathrm{Im}(v - Id) \le \dim \mathrm{Ker}(v - Id) = 2 - \dim \mathrm{Im}(v - Id)$$

i.e.

$$\dim \mathrm{Im}(v - Id) \le 1\,.$$

Or, grâce à l'assertion (A_2) le rang de $v - Id$ est non nul donc

$$\dim \mathrm{Im}(v - Id) = 1$$

et par suite

$$\dim \mathrm{Ker}(v - Id) = 2 - \dim \mathrm{Im}(v - Id) = 1\,.$$

Les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(v - Id)$ et $\dim \mathrm{Im}(v - Id)$ sont donc de même dimension.
Comme on a montré l'inclusion $\mathrm{Im}(v - Id) \subset \mathrm{Ker}(v - Id)$, on en déduit que

$$\mathrm{Im}(v - Id) = \mathrm{Ker}(v - Id)\,.$$

(3) L'assertion (A_4) implique que le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}\,(u + v - Id)$ n'est pas de dimension nulle. De plus, $\mathrm{Ker}\,(u + v - Id)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ donc sa dimension est inférieure ou égale à deux.

Supposons par l'absurde que $\mathrm{Ker}\,(u + v - Id)$ soit de dimension deux alors on aurait

$$\mathrm{Ker}\,(u + v - Id) = \mathbb{R}^2$$

puis $u + v - Id = \theta$ i.e. $v - Id = -u$. En particulier, on aurait

$$\theta = (v - Id)^2 = (-u)^2 = u^2 = Id$$

ce qui est faux. Par conséquent, $\mathrm{Ker}\,(u + v - Id)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ non réduit au vecteur nul et de dimension différente de deux. Ainsi,

$$\dim \mathrm{Ker}\,(u + v - Id) = 1\,.$$

(4) (a) Supposons par l'absurde que la famille (e_1, e_2) soit liée alors, comme le vecteur e_2 est non nul, il existerait un réel λ tel que

$$e_1 = \lambda e_2 \,.$$

Il existerait donc un réel λ tel que

$$u\,(e_2) = -\lambda e_2 \,.$$

Comme le vecteur e_2 est non nul, l'endomorphisme u admettrait donc une valeur propre réelle.

Or, l'assertion (A_1) implique que X^2+1 est un polynôme annulateur de u. Le spectre de u est donc inclus dans les racines de P qui n'a pas de racine réelle. On obtient donc une contradiction.

Par conséquent la famille (e_1, e_2) est libre et composée de deux éléments, c'est donc une base de $\mathbb{R}^2$.

(b) Par définition, $u\,(e_1) = u\,(-u\,(e_2)) = -u^2\,(e_2) = e_2$ et $u\,(e_2) = -e_1$ donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = U \,.$$

Comme $(u+v-Id)\,(e_2) = 0$, $v\,(e_2) = (Id-u)\,(e_2) = e_2 + e_1$. De plus,

$$v\,(e_1) = v\,(-u\,(e_2)) = v\,((v-Id)\,(e_2)) = \left(v^2 - v\right)(e_2) \,.$$

Or, $v^2 - 2v + Id = \theta$ donc $v\,(e_1) = v\,(e_2) - e_2 = e_1$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = V \,.$$

(5) D'après les questions précédentes, deux endomorphismes de $\mathbb{R}^2$, u et v, sont solution du problème si et seulement s'il existe une base tel que leur matrices respectives dans dette base soient U et V.

Corrigé du devoir du 12 Mars 2012

Exercice :

Soit n un entier non nul et $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels. On confond polynôme de E et fonction polynomiale associée définie sur $\mathbb{R}$.

Soit d l'application définie sur E qui à tout polynôme P , associe le polynôme $d(P) = P'$, où P' désigne la dérivée de P.

(1) E est de dimension $n+1$ et la base canonique $\mathcal{B}$ de E est $(1, X, ..., X^n)$.

(2) Pour tout $P \in E$, $d(P)$ est un polynôme à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n-1$ donc appartient à E.
Soit $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$d(P + \lambda Q) = (P + \lambda Q)' = P' + \lambda Q' = d(P) + \lambda d(Q) .$$
Donc d est un endomorphisme de E.
Soit $k \in [[0, n]]$,
$$d\left(X^k\right) = kX^{k-1}$$
donc
$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} d = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} .$$

(3) Les polynômes de dérivée nulle sont les polynômes constants i.e.
$$\operatorname{Ker} d = \mathbb{R}_0[X] .$$
Pour tout P appartenant à E, $d(P)$ est un polynôme à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n-1$ donc
$$\operatorname{Im} d \subset \mathbb{R}_{n-1}[X] .$$
De plus, le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme d défini sur E de dimension $n+1$ donne
$$\dim \operatorname{Im} d = n + 1 - \dim \mathbb{R}_0[X] = n .$$
Par conséquent,
$$\operatorname{Im} d = \mathbb{R}_{n-1}[X] .$$

(4) La matrice de d dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieur donc on lit les valeurs propres de d sur la diagonale de cette matrice. Ainsi la seule valeur propre de d est 0. L'espace propre associé est $\operatorname{Ker} d = \mathbb{R}_0[X]$.

Si d était diagonalisable alors sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ serait semblable à la matrice nulle donc serait nulle ce qui n'est pas le cas. Par suite, l'endomorphisme d n'est pas diagonalisable.

On désigne par $\left(d^k\right)_{k\geq 0}$, la suite d'endomorphismes de E définie par : $d^0 = I$, où I représente l'endomorphisme identité et, pour tout k de $\mathbb{N}$, $d^{k+1} = d^k \circ d$.
Pour tout k de $\mathbb{N}$, $\operatorname{Ker} d^k$ désigne le noyau de d^k.

(5) (a) Soit k un entier non nul. le sous espace $\operatorname{Ker} d^k$ est l'ensemble des polynômes de E dont la dérivée $k^{ème}$ est nulle. Donc

$$\operatorname{Ker} d^k = \mathbb{R}_{k-1}[X] \cap E = \begin{cases} \mathbb{R}_{k-1}[X] & \text{si } k \leq n+1 \\ E & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi

$$\dim \operatorname{Ker} d^k = \begin{cases} k & \text{si } k \leq n+1 \\ n+1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Soit $P \in \operatorname{Ker} d^k$ alors $d(P)$ est un élément de E dont la dérivée $(k-1)^{ème}$ est nulle donc dont la dérivée $k^{ème}$ est nulle. Par conséquent $d(P) \in \operatorname{Ker} d^k$. Ainsi,

$$d\left(\operatorname{Ker} d^k\right) \subset \operatorname{Ker} d^k.$$

(b) Soit P un polynôme de degré r. Pour tout $k \in [[0, r]]$, $d^k(P)$ est de degré $r-k$ car le degré de la dérivée d'un polynôme non constant est un de moins que celui du polynôme. Par conséquent, la famille $\left(d^k(P)\right)_{0\leq k\leq r}$ est échelonnée donc libre.

(6) Dans cette question, on cherche à déterminer les sous espaces vectoriels F de E stables par d.

(a) Soit P un élément non nul de F. On a

$$F = \operatorname{Vect}(P)$$

et $d(P) \in F$ donc il existe un réel λ tel que $d(P) = \lambda P$. Par suite, P est un vecteur propre de d donc P est un polynôme constant ce qui implique que

$$F = \mathbb{R}_0[X].$$

(b) Soit F un sev de E stable par d. Soit P un élément de F de degré r. Alors la famille $\left(d^k(P)\right)_{0\leq k\leq r}$ est une famille d'éléments de F. De plus, c'est une famille libre à $r+1$ de $\mathbb{R}_d[X]$. Elle en constitue donc une base. Par conséquent,

$$\mathbb{R}_r[X] \subset F.$$

(c) Soit F un sev de E stable par d. L'ensemble

$$\{\deg P,\ P \in F\}$$

est un ensemble non vide de $\mathbb{N}$ majoré par n, il admet donc un élément maximal d. Ainsi, tous les éléments de F sont de degré inférieur ou égal à d i.e.

$$F \subset \mathbb{R}_r[X].$$

De plus, il existe un polynôme P de F de degré d donc, d'après la question précédente,

$$\mathbb{R}_r[X] \subset F.$$

Par conséquent,

$$F = \mathbb{R}_r[X].$$

Réciproquement, les sev $\left(\mathbb{R}_r[X]\right)_{0\leq r\leq n}$ sont des sev de E stables par d donc ce sont les seuls.