

JEUDI 15 OCTOBRE 2015

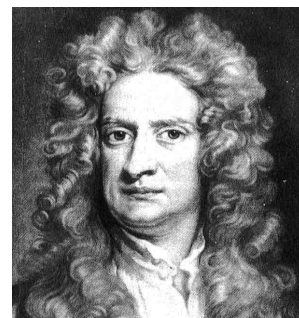
Devoir Blanc

Récurrence-Sommations-Factoriels

Durée : 3 heures

Isaac Newton (1643-1727)

Philosophe, mathématicien, physicien, alchimiste, astronome et théologien anglais. Il est surtout reconnu pour avoir fondé la mécanique classique, pour sa théorie de la gravitation universelle et la création du calcul infinitésimal. Il a aussi inventé le télescope de Newton. En mécanique, il a établi les trois lois universelles du mouvement des corps « mécanique newtonienne ». Il a aussi montré que le mouvement des objets sur Terre et des corps célestes sont gouvernés par les mêmes lois naturelles ; en se basant sur les lois de Kepler sur le mouvement des planètes, il développa la loi universelle de la gravitation.

**Blaque du jour**

- ☛ Quelle est la différence entre un prof à la retraite et le sang ? Y'en a pas, dans les deux cas il sort du corps enseignant (en saignant).
- ☛ Heureux l'étudiant qui, comme la rivière, arrive à suivre son cours sans sortir de son lit.

1 Récurrence**Exercice 1**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1 + 2u_n}{2 + u_n}$.

- ❶ Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 1}$ est une suite géométrique. Préciser sa raison.
- ❷ Donner l'expression de v_n en fonction de n .
- ❸ Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ le résultat proposé dans la question ❷.
- ❹ Simplifier $\sum_{k=1}^n v_k$.

2 Sommations et Produits

Exercice 2

En remarquant que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, en déduire une expression simple de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

Exercice 3

❶ Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

❷ En déduire une expression simple de $\sum_{k=1}^n (2k+1)$.

Exercice 4

❶ Soit q un nombre réel différent de 1. Compléter l'expression suivante : $\sum_{k=0}^n q^k$.

❷ En déduire une expression simple de $\sum_{k=1}^n 4 \times \frac{2^{k-1}}{3^k}$.

3 Factorielles et Combinaisons

Exercice 5

Montrer par récurrence sur $n \geq 3$ que $n! \geq 2 \times 3^{n-2}$.

Exercice 6

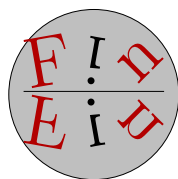
❶ Montrer que $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

❷ Rappeler puis démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la formule du binôme de Newton

$$(a+b)^n = \dots$$

❸ Rappeler les 7 premières lignes du triangle de Pascal.

❹ Donner les coefficients de a^3b^3 dans $(a+b)^6$.



4 Logie

Exercice 7

3 amis sont au restaurant. Après leur repas, l'addition s'élève à 30 dhs. Ils donnent chacun 10 dhs. Le serveur s'aperçoit qu'il s'est trompé dans les comptes et qu'en fait ils ne doivent payer que 25 dhs. Comme 5 dhs n'est pas divisible en 3, il décide de garder 2 dhs de pourboire et de leur rendre le reste. Ainsi les amis se partagent les 3 dhs et ils ont donc payé le repas 3 fois 9dhs = 27 dhs plus les 2 dhs du serveur, cela donne 29 dhs ! Où est passé le dernier dh ?